**Открытая лекция**

**Доцент Р.М.Тургунбаев**

**Предмет “Математический анализ”**

# 31.10.2017. группа МПМ202

# Тема: Показательная, тригонометрическая, логарифмическая функции комплексного переменного и их свойства

*План лекции:*

1. Показательная функция комплексного переменного и её свойства
2. Тригонометрические функции комплексного переменного и их свойства
3. Логарифмическая функция комплексного переменного и её свойства
4. Задания на самостоятельную работу

# 1.Показательная функция комплексного переменного и её свойства

Показательная функция действительного переменного (где -действительное число) определяется как предел функциональной последовательности :

В комплексной области можно аналогично определить показательную функцию . Докажем, что для комплексного числа существует предел последовательности и вычислим предел. Очевидно, что

.

Тогда

При , а бесконечно малая относительно . Учитывая эти факты, имеем

Из (1) и (2) следует существования предела последовательности

Для произвольного комплексного числа показательную функцию определяем следующим образом:

Из этого равенства следует и . При из (3) следует формула Эйлера.

Рассмотрим свойства функции .

1-свойство. Если z действительное число, то сохраняются все свойства ;

2-свойство. Аналитическая функция (во всеей комплексной плоскости);

3-свойство.

4-свойство. Сохраняется формула сложения:

Доказательство. 1) при из (3) следует .

2 и 3) Проверим условия Коши-Римана.

.

4) Пусть . Подставляя их в (3) формулу имеем:

5-свойство. Для любого комплексного числа имеет место .

6-свойство. Функция периодическая. Основной период равен Доказательство. По формуле Эйлера поэтому для любого целого числа

Если (-произвольное целое число), то получим показательную форму комплексного числа:

Например,

# 2. Тригонометрические функции комплексного переменного и их свойства

Для произвольного комплексного числа тригонометрические функции определяются следующими равенствами:

Так как функция периодическая, и период равен следует, что также периодические функции и основной период равен

Также из (1) следует что, нечетная, – четная функция:

Все формулы тригонометрии для действительной области верны и в комплексной области. Например докажем формулу сложения для синуса:

Аналогично можно доказать:

Теперь выясним вопрос, в каких точках принимают нулевые значения.Пусть, . Тогда или . Если то или

Откуда

Таким образом, функция принимает нулевые значения в точках , где

Точно также можно показать, что в точках .

и аналитичны во всех точках комплексной области, для них имеют место формулы:

.

и неограниченные функции. Действительно, для

Как известно неограниченная функция

# 3. Логарифмическая функции комплексного переменного и их свойства

Определение. Любое число удовлетворяющее уравнение

называется логарифмом число с основанием и обозначается как:

Поскольку показательная функция не принимает нулевое значение, логарифм нуля не существует.

Пусть тогда из (1) получим или . Откуда или

Таким образом, или

где, , Поэтому иногда (3) равенство можно представить как

При , т.е. называется главным значением логарифма и обозначается как :

Учитывая это (3) формулу можно написать следующим образом:

где . . Откуда многозначная функция.

**Основные теоремы о логарифмах.**

Ограничемся доказательством первого равенства. Пусть т.е. . Тогда

Из определения логарифма следует

т.е.

Пример. Написать в логарифмической форме число.

Решение. Сначало напишем число (-1) в показательной форме. Так как . Поэтому

.

# 4. Задания на самостоятельную работу

Гиперболические функции комплексного переменного и их свойства

Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями комплексного переменного

Литература

1. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.:Наука. 1999.
2. А.В. Пантелеев А.С. Якимова. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. Учебное пособие. — М.: Выш. шк., 2001. - 445 с: ил.
3. <http://www.mathprofi.ru>