

## **Matematik mantiq elementlari**

### **Reja:**

1. Mulohaza va uning qiymati.
2. Mantiqiy amallar va formulalar.
3. Asosiy mantiqiy qonunlar.

**Tayanch iboralar:** matematik mantiq, mulohaza tushunchasi, uning qiymati, mantiqiy amallar va formulalar, mulohazalar hisobi, inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya, De Morgan qonuniyatlari, Klini misoli.

Mantiq jarayonini turli matematik belgilar bilan ifodalashga intilish Arastu asarlaridayoq ko`zga tashlanadi. XVI – XVII asrlarga kelib, mexanika va matematika fani rivojlanishi bilan matematik metodni mantiqqa tatbiq etish imkoniyati kengaya bordi. Nemis faylasufi Leybnits har xil masalalarni yechishga imkon beruvchi mantiqiy matematik metod yaratishga intilib, mantiqni matematiklashtirishga asos soldi. Mantiqiy jarayonni matematik usullar yordamida ifodalash asosan XIX asrlarga kelib rivojlana boshladi.

**Mulohaza va uning qiymati.** Matematik mantiqning boshlang`ich tushunchalaridan biri mulohaza tushunchasidir. “Mulohaza” deganda biz rost yoki yolg`onligi haqida fikr yuritishi mumkin bo`lgan darak gapni tushunamiz. Har qanday mulohaza yo rost yoki yolg`on bo`ladi. Hech bir mulohaza bir vaqtning o`zida ham rost ham yolg`on bo`la olmaydi. Masalan, “ $5 > 3$ ”, “ $2 \cdot 2 = 5$ ”, “5 son tub son”, “1 son tub son”, “o`g`lining yoshi otasining yoshidan katta” mulohazalarining birinchisi – rost, ikkinchisi yolg`on, uchinchisi – rost, 4 chi va 5 chilari esa yolg`on mulohazalardir.

So`roq va undov gaplar mulohaza bo`la olmaydi. Ta’riflar ham mulohaza bo`la olmaydi. Masalan, “2 songa bo`linuvchi son juft son deyiladi” degan ta’rif mulohaza bo`la olmaydi. Ammo “agar butun son 2 ga bo`linsa, u holda bu son juft son bo`ladi” degan darak gap mulohaza bo`ladi. Bu mulohaza – rost.

Mulohazaning qiymati deganda biz uning rost yoki yolg`onligini tushunamiz. Mulohazalar odatda lotin alifbosining bosh harflari ( $A, B, C, \dots, X, Y, Z$ ) bilan, ularning qiymatlari (“rost”, “yolg`on”)ni  $R$  va  $Yo$  harflari bilan belgilaymiz. Bu yerda  $R$  – rost,  $Yo$  – yolg`on. Shuningdek,

ularni raqamlar bilan ham belgilash kiritilgan bo`lib, rost mulohaza 1, yolg`on mulohaza esa 0 bilan belgilanadi.

Qismlarga ajratilmaydigan mulohazalar elementar mulohazalar deb atyiladi. Elementar mulohazalar yordamida undan murakkabroq mulohazalarni tuzish mumkin.

Agar mulohazalar o`rtasiga mantiq amallaridan qo`ysak, yangi mulohaza hosil bo`lib, bunday mulohazaga qo`shma mulohaza deyiladi. Mulohazalar algebrasida rost yoki yolg`on tushunchalari asosiy tushunchalardan hisoblanadi. Qo`hma mulohazaning rost yoki yolg`on ekanligini ta`rifdan kelib chiqqan holda jadval asosida ko`rish birmuncha qulaylik tug`diradi. Bunday jadvalga rostlik jadvali ham deyiladi.

Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko`rib chiqamiz.

### Mantiqiy amallar va formulalar

Mulohazalar ustida quyidagi mantiqiy amallar - inkor, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya amallari mavjud bo`lib, ularning ta'rifi hamda rostlik jadvali quydagicha bo`ladi:<sup>1</sup>

**Inkor.** Bizga biror  $A$  mulohaza berilgan bo`lsin.

**Ta'rif.** Berilgan  $A$  mulohaza rost bo`lganda yolg`on, yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan mulohaza  $A$  mulohazaning inkori deyiladi va  $\neg A$  yoki  $\bar{A}$  orqali belgilanadi.

Bu yerdagi  $\bar{A}$  ( $\neg A$ ) yozuv “ $A$  emas” yoki “ $A$  bo`lishi noto`g`ri” deb o`qiladi. Inkor amali ushbu rostlik jadvali bilan aniqlanadi:

$A$	$\bar{A}$
R (1)	Yo (0)
Yo (0)	R (1)

**Masalan,**  $A$  mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo`lsin, u holda  $\neg A$  - «7-tub son emas» degan yolg`on mulohazadan iborat bo`ladi.

**Kon'yunksiya.**

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  mulohazalarning ikkalasi rost bo`lganda rost bo`ladigan hamda “va” bog`lovchisi bilan bog`lanuvchi mulohazalar  $A$

<sup>1</sup>Mathematical Literacy for Humanists, Herbert Gintis, 2-7 betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

va  $B$  mulohazalarning kon'yunksiyasi deb ataladi,  $A \wedge B$  hamda  $A \& B$  ko'rinishlarda belgilanadi.

Bu yerdagi  $A$  va  $B$  mulohazalar mos ravishda  $A \wedge B$  kon'yunksiyaning birinchi va ikkinchi hadlari, “ $\wedge$ ” va “ $\&$ ” belgilar esa kon'yunksiya amali belgisi deyiladi.  $A \wedge B$ ,  $A \& B$  yozuvlar “ $A$  va  $B$ ” deb o'qiladi. Kon'yunksiya uchun rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

$A$	$B$	$A \wedge B$
R (1)	R (1)	R (1)
R (1)	Yo (0)	Yo (0)
Yo (0)	R (1)	Yo (0)
Yo (0)	Yo (0)	Yo (0)

*Kon'yunksiya – bog'layapman degan ma'noni anglatadi*

**Masalan,**  $A$ : “Toshkent – O'zbekistonning poytaxti”,  $B$ : “Termez shahri Farg'ona vodiysida joylashgan”,  $C$ : “Biz mustaqil yurt farzandlarimiz” degan uchta mulohazani qaraylik. Ta'rifga ko'ra, ravshanki,  $A \wedge B$  mulohaza yolg'on (chunki  $A$  – rost,  $B$  – yolg'on),  $A \wedge C$  – rost (chunki  $A$  – rost,  $C$  – rost),  $B \wedge C$  – yolg'on (chunki  $B$  – yolg'on,  $C$  – rost).

### Diz'yunksiya.

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  mulohazalarning kamida bittasi rost bo`lganda rost bo`ladigan hamda “yoki” bog'lovchisi bilan bog'lanuvchi mulohazalar  $A$  va  $B$  mulohazalarning diz'yunksiyasi deb ataladi,  $A \vee B$  ko'rinishda belgilanadi.

Bu yerdagi  $A \vee B$  yozuv “ $A$  yoki  $B$ ” deb o'qiladi, “ $\vee$ ” belgi diz'yunksiya belgisi deyiladi.  $A$  va  $B$  lar  $A \vee B$  diz'yunksiyaning mos ravishda birinchi va ikkinchi hadlari deb ataladi.

Diz'yunksiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

$A$	$B$	$A \vee B$
R(1)	R(1)	R(1)
R(1)	Yo(0)	R(1)
Yo(0)	R(1)	R(1)
Yo(0)	Yo(0)	Yo(0)

*Diz'yunksiya so'zi – farqlayapman degan ma'noni anglatadi.*

**Masalan, 1)** “Yozda toqqa chiqamiz yoki dengizga boramiz” diz'yunksiyasini qaraymiz. Bu mulohaza quyidagi hollarda rost bo'ladi: biz toqqa chiqamiz, ammo dengizga bormaymiz; dengizga boramiz lekin toqqa chiqmaymiz; biz toqqa ham chiqamiz, dengizga ham boramiz.

Yangi mulohaza yolg`on bo`ladi: biz toqqa ham chiqmaymiz, dengizga ham bormaymiz.

**2)**  $10 \geq 7$  mulohazaning rost yoki yolg`onligini aniqlaylik. Bu diz'yunksiya rost, chunki  $10 > 7$  rost mulohaza va  $10 = 7$  yolg`on mulohazadan tashkil topgan.

**3)**  $11 \leq 7$  – mulohaza yolg`on, chunki,  $11 < 7$  – yolg`on,  $11 = 7$  – yolg`on.

### Implikatsiya.

**Ta'rif.**  $A$  mulohaza rost,  $B$  mulohaza yolg`on bo`lgandagina – yolg`on, qolgan hollarda rost bo`ladigan mulohazaga  $A$  hamda  $B$  mulohazalarning implikatsiyasi deyiladi va  $A \Rightarrow B$  ko'rinishda belgilanadi.

“ $\Rightarrow$ ” belgi implikatsiya belgisi deb ataladi.  $A \Rightarrow B$  yozuv “agar  $A$  bo`lsa, u holda  $B$  bo`ladi” yoki “ $A$  mulohazadan  $B$  mulohaza kelib chiqadi” degan ma'nolarni anglatadi. Implikatsiya uchun rostlik jadvali quyidagicha bo`ladi:

$A$	$B$	$A \Rightarrow B$
R(1)	R(1)	R(1)
R(1)	Yo(0)	Yo(0)
Yo(0)	R(1)	R(1)
Yo(0)	Yo(0)	R(1)

Implikatsiya so`zi mahkam bog`layapman degan ma'noni anglatadi.

**Masalan,** 1) “Agar 72 soni 9 ga karrali bo`lsa, u holda bu son 3 ga ham karrali bo`ladi”. Bu rost implikatsiya.

2) “Agar  $-3 < -1$  bo`lsa, u holda  $9 < 8$  bo`ladi”, implikatsiyasi yolg`on, chunki  $-3 < -1$  shart – rost,  $9 < 8$  yolg`on.

### Ekvivalensiya.

**Ta'rif.**  $A$  va  $B$  mulohazalar bir vaqtida rost yoki bir vaqtida yolg`on bo`lganda rost bo`ladigan mulohaza  $A$  va  $B$  mulohazalarning ekvivalensiyasi deyiladi,  $A \Leftrightarrow B$  ko'rinishda belgilanadi.

Bu yerdagi  $A \Leftrightarrow B$  yozuv “ $A$  faqat va faqat, qachonki  $B$ ”, yoki “ $A$  ekvivalent  $B$ ”, yoki “ $B$  uchun  $A$  zarur va yetarli” deb o`qiladi. Ekvivalensiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo`ladi:

$A$	$B$	$A \Leftrightarrow B$
R(1)	R(1)	R(1)
R(1)	Yo(0)	Yo(0)

$Yo(0)$	$R(1)$	$Yo(0)$
$Yo(0)$	$Yo(0)$	$R(1)$

**Masalan,** A: “972 soni 9 ga karrali”, B: “972 soni raqamlarining yig`indisi 9 ga karrali” mulohazalari berilgan bo`lsin. U holda A va B mulohazalarning ekvivalensiyasi quyidagicha bo`ladi. “972 soni 9 ga karrali bo`ladi, faqat va faqat shu holda, qachonki bu son raqamlarining yig`indisi 9 ga karrali bo`lsa. Bu ekvivalensiya rost.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz:

1-misol. Agar  $a > b$  va  $b > c$  bo`lsa,  $a > c$  bo`ladi.  
 $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$ .

2-misol.  $a > b$  bo`lsa,  $a + c > b + c$  bo`ladi.  $(a > b) \Rightarrow (a + c > b + c)$ .

3-misol.  $a = 0$  yoki  $b = 0$  bo`lsa,  $ab = 0$  bo`ladi va aksincha,  $ab = 0$  bo`lsa,  $a = 0$  yoki  $b = 0$  bo`ladi.  $(ab = 0) \Leftrightarrow ((a = 0) \vee (b = 0))$ .

4-misol.  $a > 0$  va  $b > 0$  bo`lsa,  $ab > 0$  bo`ladi.  
 $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (ab > 0)$ .

5-misol. Ixtiyoriy  $x$  haqiqiy son uchun  $|x| \geq x$ .  $\forall x \in R: |x| > x$ .

6-misol. Ixtiyoriy  $a \geq 0$  son uchun, shunday  $x \in R$  son mavjudki,  
 $x^2 = a$  bo`ladi, ya’ni  $\forall a \geq 0, \exists x \in R: x^2 = a$ .

Mantiqiy qonunlarga amal qilish to`g`ri, tushunarli, aniq, izchil, ziddiyatsiz, asoslangan fikr yuritishga imkon beradi. Aniqlik, izchillik, ziddiyatlardan xoli bo`lish va isbotlilik (asoslanganlik) to`g`ri tafakkurlashning asosiy belgilaridir. Bular mantiqiy qonunlarning asosini tashkil etuvchi belgilar bo`lganligi uchun, ularning har birini alohida-alohida ko`rib chiqamiz.

## Mulohazalar hisobi

“Mulohaza” va “isbot” so`zlarining turmushdagi mazmuni anchayin noaniq. Shu sababli, birinchi bo`lib shu tushunchalarni aniqlash uchun maxsus formal (ya’ni formulalarga tayangan) til ishlataladi.

Formal tilda mantiqiy bog`lovchilar deb ataluvchi maxsus belgilardan foydalaniladi:  $\wedge$  - mantiqiy ko`paytirish,  $\vee$  - mantiqiy qo`shish amallari deb yuritiladi.  $A \wedge B$  mulohazani A va B;  $A \vee B$  mulohazani A yoki B;  $A \Rightarrow B$  mulohazani A mulohazadan B mulohaza

kelib chiqadi yoki agar  $A$  bo`lsa, u holda  $B$  bo`ladi;  $A \Leftrightarrow B$  mulohazani  $A$  mulohazadan  $B$  mulohaza va  $B$  mulohazadan  $A$  mulohaza kelib chiqadi yoki  $A$  bo`ladi, faqat va faqat shu holdaki, agar  $B$  bo`lsa, deb o`qiymiz. Mulohazalar to`plamini  $M$  harfi bilan belgilaylik. U holda  $M$  to`plam, unda bajariladigan barcha  $\cup, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  amallar bilan birqalikda mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.  $M$  to`plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo`lsa, u holda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so`ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

**Ta’rif.**  $A, B, C, \dots$  mulohazalarni inkor, diz'yunksiya, kon'yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya kabi mantiqiy bog`lovchilar vositasi bilan ma'lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab mulohaza **mantiqiy formula** deyiladi.

Mantiqiy formulalar tabiiy tildagi mulohazalarning matematik modeli bo`ladi. Mulohazalar hisobida mantiqiy formulalar **rostlik jadvallari** yordamida izohlanadi. Bunday jadvallar mantiqiy bog`lovchi orqali tuzilgan murakkab mulohazaning rost (1) yoki yolg`on (0) ligini tashkil etuvchi mulohazalar rostligiga qarab aniqlanadi. Yuqorida amallarning rostlik jadvallaridan foydalanib, yanada murakkabroq mulohazalar uchun rostlik jadvalini tuzish mumkin.

**Masalan:**  $((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$  mulohazaning rostlik jadvalini tuzaylik:

$A$	$B$	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \& (\neg A)$	$((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1

Jadvalni yakunlab, qaralayotgan  $A$  va  $B$  mulohazalar rostligidan qat'iy nazar  $((A \vee B) \& (\neg A)) \Rightarrow B$  mulohaza doim rost bo`lishini ko`ramiz.

### Asosiy mantiqiy qonunlar

**1°.**  $A \vee \neg A$  – uchinchisini inkor qilish qonuni.

Bu qonun quyidagicha ifodalanadi: bir-biriga zid bo`lgan ikki fikrdan biri hamisha to`g`ri (rost) bo`lib, ikkinchisi xatodir, uchinchisi bo`lishi mumkin emas.

**Masalan**, bir vaqtning o`zida, bir xil sharoitda inson yo axloqli, yo axloqsiz bo`ladi. Yuqorida keltirilgan ikkita qonun fikrlash jarayonida ziddiyatga yo`l qo`ymaslikni talab qiladi va tafakkurning ziddiyatsiz hamda izchil bo`lishini ta'minlaydi.

**2°.**  $A \& \neg A \Leftrightarrow 0$  – ziddiyatsizlik qonuni.

Bu qonun quyidagicha ifodalanadi: obyektiv voqelikdagi buyum va hodisalar bir vaqtda, bir xil sharoitda biror xususiyatga ham ega bo`lishi, ham ega bo`lmasligi mumkin emas.

**Masalan**, bir vaqtning o`zida, bir xil sharoitda inson ham axloqli, ham axloqsiz bo`lishi mumkin emas.

**3°.**  $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$  - qo`sh inkor qonuni.

«Bu kishi ilg`or emas degan gap to`g`ri emas» degan fikr «bu kishi ilg`or» degan fikrga teng kuchli.

**4°.**  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow \neg A)$  - kontrapozitsiya qonuni.

Bu qonun inkor amali yordamida tezis (isbotlanishi kerak bo`lgan fikr) va asosni (tezisni isboti uchun keltirilgan dalillar) o`rnilarini almashtirishga imkon yaratadi.

**Masalan**, «Agar shaxs chuqur bilimga ega bo`lsa, u holda u komil inson bo`ladi» degan mulohaza “Komil inson bo`lmagan shaxs chuqur bilimga ega bo`lmaydi” degan mulohazaga teng kuchli.

**5°.**  $\neg(A \& B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$  ;

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \& \neg B$  - de Morgan<sup>2</sup> qonunlari.

De Morgan qonunlari inkor amali yordamida kon'yunksiya va diz'yunksiya amallarini bir-biri bilan almashtirishga imkon yaratadi.

**Masalan**, 1) «Halol va vijdonli inson axloqli bo`ladi» mulohazaning inkori «Halol bo`lmagan yoki vijdonli bo`lmagan inson axloqsiz bo`ladi» mulohazaga teng kuchli.

2) «Men darsdan so`ng yo kutubxonaga, yo do`stimnikiga bordim» mulohazaning inkori “Men darsdan so`ng kutubxonaga ham, do`stimnikiga ham bormadim” mulohazaga teng kuchli.

**6°.**  $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ .

Masalan, «Agar bo`sh vaqtim bo`lsa, unda televizor ko`raman» mulohaza «Yoki bo`sh vaqtim bo`lmaydi, yoki televizor ko`raman» mulohazaga teng kuchli.

**7°.**  $A \& B \Leftrightarrow B \& A$ ;  $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$  – kommutativlik qonunlari.

---

<sup>2</sup> De Morgan (Augustus de Morgan (1806 - 1871) – British Mathematician.

Kommutativlik qonunlari o`z-o`zidan ravshan bo`lsa ham, ularni o`ylamasdan qo`llashda muammolarga duchor bo`lish mumkin. Bu holatga **Klini<sup>3</sup> misolini** keltiramiz:

$A$  : “Maryam turmushga chiqdi”;  $B$  : “Maryam farzand ko`rdi”.

Bu holda  $A \& B$ ,  $B \& A$  formulalar mos ravishda teng kuchli bo`lmagan talqinlarga ega.

Fikrimizcha, buning sababi yuqoridagi mulohazalarda ko`rinmas holatda vaqt parametri ishtirok etishida.

**8°.**  $A \& (B \& C) \Leftrightarrow (A \& B) \& C$ ;  $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$  – assotsiativlik qonunlari.

**9°.**  $A \& (B \vee C) \Leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$ ;  $A \vee (B \& C) \Leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$  - distributivlik qonunlari.

**10°.**  $A \& (B \vee A) \Leftrightarrow A$ ;  $A \vee (B \& A) \Leftrightarrow A$  - qisqartirish qonunlari.



Augustus De Morgan  
(1806–1871)



Stephen C. Kleene  
(1909–1994)

### Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar:

1. Mulohaza nima?
2. Har qanday o`tgan zamon darak gapi mulohaza bo`la oladimi? Kelasi zamon darak gaplari-chi?
3. Mulohazalar kon'yunksiyasi nima? Qanday o`qiladi? Rost kon'yunksiyaga, yolg`on kon'yunksiyaga misollar keltiring.
4. Mulohazalar diz'yunksiyasi nima? Qanday o`qiladi? Rost diz'yunksiyaga, yolg`on diz'yunksiyaga misollar keltiring.
5. Mulohazalar implikasiyasi nima? Qanday o`qiladi? Misollar keltiring.

---

<sup>3</sup> Stephen Cole Kleene (1909-1994) – American Mathematician

6. Mulohzalar ekvivalensiyasi nima? Qanday o`qiladi? Misollar keltiring.
7. Mulohaza inkori nima? Qanday o`qiladi? Misollar keltiring.
8. Mantiqiy amallarning bajarilish tartibini ayting.
9. Rostlik jadvali nima?