Mavzu: Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral

Reja:

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. Asosiy integrallash jadvali.

Tayanch tushunchalar: *integral hisobning asosiy masalalari va metodlari, boshlang'ich funksiya, aniqmas integral, integral ostidagi funksiya, integral ostidagi ifoda, integrallash jadvali*

17-asrga kelib, texnika va tabiiy fanlarning taraqqiyoti matematika oldiga juda ko'p yangi masalalarni, jumladan, murakkab geometrik shakldagi jismlarning yuzini, hajmini, og'irlik markazini hisoblash masalalarini qo'ydi. Bularni aniqlashning qadimgi eski usullari o'rniga yangi va kuchli matematik usullar yaratish zaruriyati tug'ildi. Bunday masalalar integral hisobning paydo bo'lishiga olib keldi.

Integral hisob – integrallar va ularning xossalarini, hisoblash usullarini, tatbiqlarini o'rganuvchi matematika bo'limi.

Boshlang'ich funksiya tushunchasi. Differensial hisobning asosiy vazifasi berilgan *F(x)* funksiyaga ko'ra uning hosilasi $f(x) = F'(x)$ ni yoki differensialini topishdan iborat edi.

Integral hisobning asosiy vazifasi buning teskarisi bo'lib, *F(x)* funksiyani uning ma'lum *f(x)* hosilasiga yoki $f(x)dx$ differensialiga ko'ra topishdan iborat. Demak, *f(x)* funksiya berilgan, shunday *F(x)* funksiyani topish kerakki, uning hosilasi *f(x)* ga teng bo`lsin, ya'ni

$$F`(x) = f(x) \qquad (1)$$

bo`lsin.

Ta'rif**.** Agar *[a,b]* kesmada aniqlangan *f(x)* funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida $F^1(x)=f(x)$ tenglik bajarilsa, *F(x)* funksiya shu kesmada *f(x)* funksiyaga nisbatan boshlang`ich funksiya deb ataladi.

Misol. Boshlang`ich funksiya ta'rifiga asosan, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ funksiya $f(x)=x^3$ funksiyasi uchun boshlang`ich ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^4}{4}\right)'=x^3$

Agar *f(x)* funksiya uchun boshlang`ich funksiya mavjud bo`lsa, u boshlang`ich yagona bo`lmasligini ko`rish oson. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 6; F(x) = \frac{x^4}{4} + 7$.

Umuman $F(x) = \frac{x^4}{4} + c$.

Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyadan $[a,b]$ kesmada boshlang`ich funksiyalari bo`lsa, ular orasida ayirma o`zgarmas songa teng bo`ladi. Agar berilgan $f(x)$ funksiya uchun qanday bo`lmasin birgina $F(x)$ boshlang`ich funksiya topilgan bo`lsa, $F(x)$ funksiya uchun har qanday boshlang`ich funksiya $F(x)+C$ ko`rinishga ega bo`ladi.

Aniqmas integral va uning xossalari.

Ta’rif. Agar $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $F(x)+C$ (bu yerda C – ihtiyoriy doimiy) funksiyalar to‘plami shu kesmada $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va $\int f(x)dx = F(x) + C$ kabi belgilanadi.

Bu yerda $f(x)$ – integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda,

$\int$ – integral belgisi deyiladi.

Aniqmas integralni topish jarayoni yoki berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topish jarayoni **integrallash** deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1) Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2) Aniqmas integralning differensiali integral belgisi ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$d\left(f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3) Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ihtiyoriy o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x) + C$$

4) Biror funksiyaning differentsialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ihtiyoriy o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

5) Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo’lsa, u holda barcha o’zgarmas α lar uchun

$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha\left[F(x) + C\right] = \alpha F(x) + K$ bo’ladi.

Bu yerda $k = \alpha C$ - integraldagi yangi o’zgarmas son. Bu xossa quyidagicha: “funksiyani o’zgarmas songa ko’paytmasining integrali o’zgarmas sonni shu funksiya integraliga ko’paytmasiga teng”.

6) Chekli sondagi funksiyalarning algerbaik yig‘indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int \left(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\int f_3(x)dx$$

7) Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, ya’ni

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ bo‘lsa u holda } \int f(u)du=F(u)+C$$

tenglik to‘g‘ri bo‘ladi, bu yerda $u=u(x)$ x ning differensiallanuvchi funksiyasi. Bu xossa integrallash formulalarining invariantligi deyiladi.

Asosiy integrallash jadvali:

1) $\int 0\cdot dx=C$ 2) $\int 1\cdot dx=x+C$

3) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1)$ 4) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

5) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\mathrm{arctg}x+C$ 6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

7) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ 8) $\int \sin x dx=-\cos x+C$

9) $\int \cos x dx=\sin x+C$ 10) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\mathrm{tg}x+C$

11) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\mathrm{ctg}x+C$

Quyidagi integrallar ko’p qo’llanilgani uchun eslab qolish lozim:

Agar $\frac{d}{dx}x=1$ bo’lsa, u holda $\int 1dx=x+C$ yoki $\int dx=x+C$ bo’ladi.

Agar $\frac{d}{dx}x^2=2x$ bo’lsa, u holda $\int 2xdx=x^2+C$ yoki $\int d(x^2)=x^2+C$ bo’ladi.

Agar $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$ bo’lsa, u holda $\int 3x^2dx=x^3+C$ yoki $\int d(x^3)=x^3+C$ bo’ladi.

Agar $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ bo’lsa, u holda $\int nx^{n-1}dx=x^n+C$ yoki $\int d(x^n)=x^n+C$ bo’ladi.

Agar $\frac{d}{dx}(\frac{u^{m+1}}{m+1})=u^m$ bo’lsa, u holda $\int u^m du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C$ yoki $\int d(\frac{u^{m+1}}{m+1})=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C$ bo’ladi.

Agar $\frac{d}{dt}\sin t = \cos t$ bo'lsa, u holda $\int \cos t dx = \sin t + C$ yoki $\int d(\sin t) = \sin t + C$ bo'ladi.[1]

Agar $\frac{d}{dt}\cos t = -\sin t$ bo'lsa, u holda $\int \sin t dx = -\cos t + C$ yoki $-\int d(\cos t) = -\cos t + C$ bo'ladi.

1-misol. $\int 5dx.$

Yechilishi: xossaga asosan o'zgarmas ko'paytuvchi 5 ni integral ishorasi tashqarisiga chiqaramiz va formulani qo'llab quyidagini hosil qilamiz:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C.$$

Tekshirish. $d(5x + C) = 5dx.$ Integral ostidagi ifodani hosil qildik, demak, integral to'g'ri olingan.

2-misol. $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C.$ Tekshirish: $d\left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) = \frac{1}{4}\cdot 4x^2 dx = x^3 dx.$

Tekshirish: $d\left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 12x + C\right) = (4x^2 - 4x + 12)dx = 4(x^2 - x + 3)dx.$

3-misol. Quyidagi $I = \int (3x+7)^2 dx$ integralni hisoblash uchun $u = 3x + 7$ ni $du = 3dx$ ga almashtirish va o'rniga qo'yib yozish kerak:

$$I = \frac{1}{3}\int (3x+7)^2 3dx = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\int u^2 du = \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^3}{3} + C = \frac{1}{9}(3x+7)^3 + C$$ [2]

Mavzu yuzasidan savol va topshiriqlar

1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integralni ta'riflang.
3. Aniqmas integralning xossalarini ayting.
4. Aniqmas integralni topish qoidalari qanday?
5. Trigonometrik funksiyalarning aniqmas integrali nimaga teng?

---

[1] ***J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p.181 prop.of int. betning mazmun, mohiyatidan foydalanildi***

[2] ***J.H.Heinbockel. Introduction to Calculus Volume 1, p.184, example 3-3betlarning mazmun, mohiyatidan foydalanildi***