Предел функции от m переменных. Повторные пределы

Лектор: доцент Р.Тургунбаев

План лекции

- Определения предела функции в точке, примеры.
- Свойства предела функции
- Повторные пределы, свойства, примеры.

Вопросы

1. Вспомните определение предела функции от одного переменного в точке, какие понятия участвуют в определении?
2. Дайте определение предельной точки. Приведите примеры.
3. Дайте определение предела функции по Коши.
4. Дайте определение предела функции по Гейне.
5. Назовите свойства предела функции

1. Определения предела функции в точке, примеры.

1-определение. Пусть $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция m переменных, определенная на множестве D и точка $P_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$ предельная точка множества D. Если для любого ε положительного числа существует ***окрестность*** P_0, такая что для всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ из этой окрестности принадлежащие D $(P \neq P_0)$, выполняется неравенство $|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - A| < \varepsilon$, то число А называется пределом функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точке $P_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

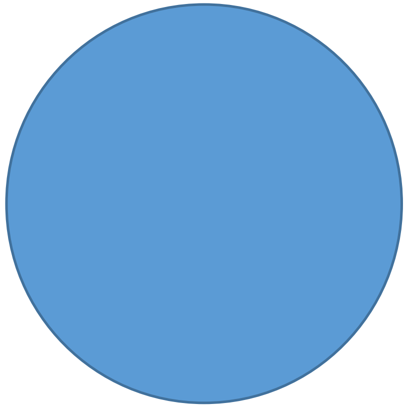
Этот факт записывается следующим образом:

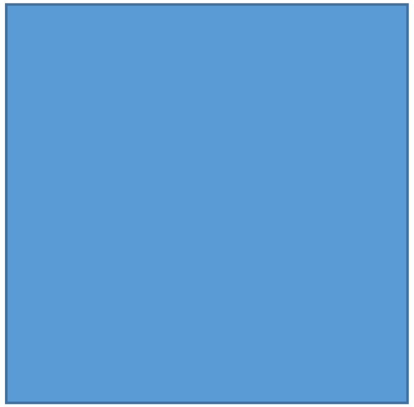
$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = A \text{ или } \lim_{P \to P_0} f(P) = A.$$

Виды окрестностей

сферическая

кубическая





случай сферической окрестности

2-определение. Число A называется пределом функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в точке $P_0(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, если по любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ принадлежащих D $(P \neq P_0)$ и удовлетворяющих условиям $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_m - a_m)^2} < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1, x_2, \ldots, x_m) - A| < \varepsilon$.

случай кубической окрестности

3-определение. Число A называется пределом функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точке $P_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$, если по любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $\delta > 0$, что для всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ принадлежащих D $(P \neq P_0)$ и удовлетворяющих условиям $|x_i - a_i| < \delta$ $(i = \overline{1, m})$, выполняется неравенство $|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - A| < \varepsilon$.

1-*пример.* Показать, что $f(x,y) = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ имеет предел в точке (0,0) равный $A = 0$.

2-пример. Показать, что $f(x,y) = 3xy + 4x - 7y + 5$ имеет предел в точке (2,1) равный $A = 12$.

Определение по Гейне

4-определение. Пусть $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция m переменных, определенная на множестве D и точка $P_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$ предельная точка множества D. Число A называется пределом функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точке $P_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$, если для любой последовательности точек $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ взятых из области определения функции, отличных от точки P_0 и сходящихся к P_0, соответствующая последовательность значений функций $f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_n), \dots$ сходится к числу A.

3-пример. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{x-2y}{x+y}$ в точке $P_0(0,0)$ не имеет предела.

Решение. $P_n\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$ и $Q_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$f(P_n) = f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = 0$. С другой стороны

$f(Q_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(Q_n) = -\frac{1}{2}$.

2. Свойства предела функции

1-теорема. Если в точке $P_0(a,b)$ существует конечный предел функции $f(x,y)$, то в достаточно малой окрестности точки $P_0(a,b)$ функция $f(x,y)$ ограничена.

2-теорема. Если в точке $P_0(a,b)$ существуют конечные пределы функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x,y) \leq g(x,y)$, тогда

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) \leq \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)\,.$$

3-теорема. Если в точке $P_0(a,b)$ существуют конечные пределы функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$, тогда в этой точке существуют пределы функции

а) $f(x,y) \pm g(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(f(x,y) \pm g(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) \pm \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)$;

b).$f(x,y) \cdot g(x,y)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}}(f(x,y) \cdot g(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y) \cdot \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)$;

c) $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y)}$ (при условии $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} g(x,y) \neq 0$).

4-теорема. Если в точке $P_0(a,b)$ существует конечный предел $A > 0$ $(A < 0)$функции $f(x,y)$, то в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x,y) > 0$ $(f(x,y) < 0)$.

5-теорема. Если в точке $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ существуют конечные пределы функции $x = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_k), y = \psi(t_1, t_2, \dots, t_k)$, равные соответственно a, b, в точке $P_0(a,b)$ существует конечный предел функции $f(x,y)$ равный А, то в точке $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ существует конечный предел сложной функции $f\big(\varphi(t_1, t_2, \dots, t_k), \psi(t_1, t_2, \dots, t_k)\big)$ равный А.

3. Повторные пределы, свойства, примеры

Пусть, функция $f(x, y)$ определена в множестве D и точка $P_0(a, b)$ предельная точка D. Фиксируем y и переходим к пределу при $x \to a$. Если предел существует, то он является функцией от y: $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to a} f(x, y)$. Допустим, что при $y \to b$ существует предел функции $\varphi(y)$. Тогда этот предел называется повторным пределом (сначало по x, потом по y) функции $f(x, y)$ в точке $P_0(a, b)$ и обозначается как: $\lim\limits_{y \to b} \lim\limits_{x \to a} f(x, y)$.

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{y \to b} f(x, y)$.

4-пример. Найти повторные пределы функции $f(x,y)=\frac{x-2y}{x+y}$ в точке (0,0).

Решение. $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2y}{x+y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-2y}{y}=-2$.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

6-теорема. Если

1) в точке $P_0(a,b)$ существует конечный кратный предел функции $f(x,y)$: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = A$;

2) при фиксированном x существует предел *f*(*x,y*) ,

то повторный предел $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ существует и имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x,y) = A$.

7-теорема. Если

1) в точке $P_0(a,b)$ существует конечный кратный предел функции $f(x,y)$: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=A$;
2) 2) при фиксированном y существует предел $f(x,y)$, то повторный предел $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ существует и имеет место равенство $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y)=A$.

Задания

1. Докажите равносильность определений 1 и 4.
2. Докажите теоремы 1, 2, 3,5.
3. Докажите теорему 8.
4. С помощью теорем 7 и 8, сформулируйте условие равенства повторных пределов.
5. Приведите примеры функции, для которой повторные пределы равны, но не существует кратного предела.