Funksional ketma-ketlik va uning limiti. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlik. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikning xossalari

MO ‘M 201-202. Matematik analiz

Ma’ruzachi: R.M.Turgunbayev

Reja

1. Funksional ketma-ketlik, asosiy tushunchalar
2. Funksional ketma-ketlikning limiti, misollar
3. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlik tushunchasi
4. Funksional ketma-ketlikning tekis yaqinlashish sharti
5. Tekis yaqinlashuvchi funksional ketma-ketlikning xossalari

1. Natural sonlar to‘plami **N** va biror X to‘plamda ($X \subset \mathbf{R}$) aniqlangan F funksiyalar to‘plami berilgan bo‘lsin. Har bir natural $n \in \mathbf{N}$ songa F to‘plamdagi bitta $u_n(x)$ funksiyani mos qo‘yish natijasida hosil bo‘lgan

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots \qquad (1)$$

ketma-ketlik *funksional ketma-ketlik* deyiladi va $\{u_n(x)\}$ kabi belgilanadi.

$u_n(x)$ funksiya (1) funksional ketma-ketlikning umumiy hadi deyiladi.

X to‘plamda x_0 nuqtani olib, berilgan (1) funksional ketma-ketlikning har bir hadining shu nuqtadagi qiymatlarini qaraylik.

Ular

$$u_1(x_0), u_2(x_0), \ldots, u_n(x_0), \ldots \qquad (2)$$

sonlar ketma-ketligini tashkil etadi.

Ta'rif. Agar (2) sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo'lsa, u holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik x_0 *nuqtada yaqinlashuvchi* (uzoqlashuvchi) deyiladi, x_0 nuqta esa *yaqinlashish (uzoqlashish) nuqtasi* deyiladi.

$\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning barcha yaqinlashish nuqtalaridan iborat to'plam, uning *yaqinlashish sohasi* deyiladi.

2. Aytaylik, D ($D \subset R$) to‘plam $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning yaqinlashish sohasi bo‘lsin. U holda D to‘plamdan olingan har bir x nuqtada funksional ketma-ketlik sonli ketma-ketlikga aylanib, u yaqinlashuvchi, ya’ni chekli limitga ega bo‘ladi. D to‘plamdan olingan har bir x ga unga mos keladigan sonli ketma-ketlikning chekli limitini mos qo‘ysak, D to‘plamda aniqlangan funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiya $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning *limit funksiyasi* deyiladi:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=f(x).$$

Bu holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D sohada (D sohaning har bir nuqtasida) $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi deyiladi.

$\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D sohaning har bir nuqtasida $f(x)$ funksiyaga yaqinlashadi, degan jumlani, boshqacha, quyidagicha aytish mumkin:
ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son va ixtiyoriy $x\in D$ uchun shunday $n_0=n_0(\varepsilon,x)$ topilib, barcha $n>n_0$ larda $|u_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi.

Misollar. Funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi, yaqinlashish sohasi va limit funksiyasini toping.

1. $\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{2+x^2}, \frac{1}{3+x^2}, \dots, \frac{1}{n+x^2}, \dots$

2. $\sin x$, $2\sin\frac{x}{2}$, $3\sin\frac{x}{3}$,…, $n\sin\frac{x}{n}$,…

3. Umumiy hadi $u_n(x)=nx^2$ bo‘lgan funksional ketma-ketlikning aniqlanish sohasi, yaqinlashish sohasi va limit funksiyasini toping.

4. Ushbu $\left\{\frac{n!}{x^2+n}\right\}$ funksional ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

5. Ushbu $\{x^n\}$ ketma-ketlikni yaqinlashishga tekshiring.

3.

1-*ta'rif*. Agar ixtiyoriy ε>0 son olinganda ham, faqat ε ga bog'liq n_0 natural son topilib, ixtiyoriy $x\in D$ va barcha $n>n_0$ larda $|u_n(x)–f(x)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda $f(x)$ funksiyaga *tekis yaqinlashadi* deyiladi.

Agar yaqinlashuvchi $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to'plamda tekis yaqinlashmasa, u holda bu ketma-ketlik D to'plamda *notekis yaqinlashadi* deyiladi.

Endi quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$d_n = \sup_{x\in D}|u_n(x) - f(x)|$$

4.

1-*teorema*. $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to‘plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashishi uchun

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

2-*ta'rif*. Agar umumiy hadi

$$d_n = \sup_{x \in D} |u_n(x) - f(x)|$$

bo‘lgan ketma-ketlikning limiti

$$\lim_{n \to \infty} d_n = 0$$

bo‘lsa, u holda $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to‘plamda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

Ravshanki, $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning *D* to‘plamda *f(x)* funksiyaga tekis yaqinlashishidan bu ketma-ketlikning *f(x)* funksiyaga *D* to‘plamning har bir nuqtasida yaqinlashishi kelib chiqadi.

1-*misol*. $\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{2+x^2}, \frac{1}{3+x^2}, \dots, \frac{1}{n+x^2}, \dots$ funksional ketma-ketlik $D=$ **R** da $f(x)=0$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Isbotlang.

2-*misol*. Umumiy hadi $u_n(x)=x^n$ bo‘lgan funksional ketma-ketlikni $D=[0;1]$ to‘plamda tekis yaqinlashishga tekshiring.

2-*teorema*. (Koshi) $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik D to‘plamda limit funksiyaga ega bo‘lishi va unga tekis yaqinlashishi uchun ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $n_0 \in \mathbf{N}$ son mavjud bo‘lib, barcha $n > n_0$, $m > n_0$ va ixtiyoriy $x \in D$ nuqtalar uchun

$$|u_n(x)-u_m(x)| < \varepsilon \qquad (1)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

5.

3-*teorema*. Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi D to‘plamda uzluksiz bo‘lib, bu funksional ketma-ketlik D da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $f(x)$ limit funksiya ham D to‘plamda uzluksiz bo‘ladi.

4-*teorema*. Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, bu funksional ketma-ketlik $[a;b]$ da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b u_1(x)dx, \int_a^b u_2(x)dx, \dots, \int_a^b u_n(x)dx, \ \dots$$

ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi, uning limiti esa

$$\int_a^b f(x)dx$$

ga teng bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (5)$$

5-teorema. Faraz qilaylik, [$a;b$] kesmada yaqinlashuvchi $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlik berilgan bo‘lib, uning limit funksiyasi $f(x)$ bo‘lsin.

Agar $\{u_n(x)\}$ funksional ketma-ketlikning har bir hadi [$a;b$] kesmada uzluksiz hosilaga ega bo‘lib, bu hosilalardan tuzilgan

$$u_1'(x), u_2'(x), u_3'(x), \dots, u_n'(x), \dots \qquad (6)$$

funksional ketma-ketlik [$a;b$] da tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $f(x)$ limit funksiya shu [$a;b$] kesmada

$f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, $\{u_n'(x)\}$ ketma-ketlikning limiti $f'(x)$ ga teng bo‘ladi.