Монотонные последовательности, число е. Принцип вложенных отрезков

Лектор Р.М.Тургунбаев

Продолжите предложения

1) Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей, если …
2) Последовательность $\{x_n\}$ называется убывающей, если …
3) Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если …
4) Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если …

5) Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если …

6) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff \ldots$

7) $supX$ – это …

8) $infX$ – это …

9) Последовательность $\{x_n\}$ называется не ограниченной сверху, если …

10) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \ldots$

План лекции

- 1) Предел монотонной последовательности
- 2) Число e
- 3) Принцип вложенных отрезков

1-теорема. *Пусть дана монотонно возрастающая числовая последовательность* $\{x_n\}$. *Если она ограничена сверху, то она имеет конечный предел, в противном же случае – она стремится к* $+\infty$.

Доказательство.

По условию

$\{x_n\}$-возрастает$\Leftrightarrow$ $\forall n \in N \Longrightarrow x_n < x_{n+1}$ (1)

$\{x_n\}$-ограничено сверху$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\exists M \in R\ \forall n \in N \Longrightarrow x_n \leq M$ (2)

Или множество $\{x_n\}$ ограничено сверху.
Откуда $\exists \sup\{x_n\}$. Пусть $\sup\{x_n\} = a$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

Из свойства супремума

$$\sup\{x_n\} = a \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \Longrightarrow x_n \leq a, \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \ x_{n_0} > a - \varepsilon. \end{cases}$$

Тогда учитывая (1) имеем.

$$\forall n > n_0 \Longrightarrow\ a - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Т.е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ или $|x_n - a| < \varepsilon$.

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \forall n > n_0 \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a = \sup\{x_n\}$.

Пусть $\{x_n\}$-неограничено сверху $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\forall E \in R\ \exists n_0 \in N \Longrightarrow x_{n_0} > E$.

Тогда $\forall E > 0\ \exists n_0 \in N \Longrightarrow x_{n_0} > E$.

Так как $\{x_n\}$-возрастает, то

$\forall n > n_0 \Longrightarrow x_n > E$. Значит, $\forall E > 0\ \exists n_0$
$\forall n > n_0 \Longrightarrow x_n > E$. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Аналогично доказывается следующая теорема

2-теорема. *Пусть дана монотонно убывающая числовая последовательность* $\{x_n\}$. *Если она ограничена снизу, то она имеет конечный предел, в противном же случае – она стремится к* $-\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = inf\{x_n\}$$

Примеры

Доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots\sqrt{c}}}=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$$

для любого положительного c.

Число e

3-теорема. Числовая последовательность с общим членом $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Доказательство. Сначала рассмотрим последовательность с общим членом $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Докажем, что $\{y_n\}$ сходится. Очевидно, что она ограничена снизу (например нулём). Поэтому в силу 2-теоремы достаточно показать, что она монотонна убывает.

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n-1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \\
&= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) =
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^4}\right)^n < 1.$$

Здесь используется неравенством, которое следует из неравенства Бернулли:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{n}{n^2}\right) < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

Таким образом,

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} < 1.$$

Откуда $\{y_n\}$ - убывающая последовательность. Она ограничена снизу. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ существует.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$

Учитывая, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

имеем,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

существует

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

$$e = 2{,}718281828459045\ \ldots$$

Теорема. Если

1) последовательность $\{x_n\}$ возрастает; последовательность $\{y_n\}$ убывает;

2) $\forall n \in N \quad x_n < y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, то последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема о вложенных отрезках

Пусть имеется бесконечная последовательность вложенных один в другой отрезков $[a_1; b_1], [a_2; b_2], \dots, [a_n; b_n]$, … , так что каждый последующий содержится в предыдущем $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ \dots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots$, причём длины этих промежутков стремятся к 0 с возрастанием n: $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, тогда существует единственная точка, общая всем отрезкам.