

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL EDUCATION
OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO
ULUGBEK

MOSCOW STATE UNIVERSITY NAMED AFTER M.V.LOMONOSOV

NATIONAL UNIVERSITY OF KIRGIZSTAN NAMED AFTER
J.BALASAGIN

INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKI,
ACADEMY OF SCIENCE OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

TASHKENT STATE PEDAGOGICAL UNIVERSITY NAMED AFTER
NIZAMI

ABSTRACTS

of the international conference

**MODERN PROBLEMS OF GEOMETRY AND TOPOLOGY
AND ITS APPLICATIONS**

21-23 November 2019, Tashkent, Uzbekistan

Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения: Материалы международной научной конференции (Ташкент, 21-23 ноября 2019 г).

Материалы международной научной конференции "**Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения**" содержат научные доклады по следующим направлениям: теория размерности, теория непрерывных отображений, топологические группы и алгебры, теория равномерных пространств, вероятностные меры и ковариантные функторы, кардинальные инварианты, дифференциальная и алгебраическая топология, геометрия и топология многообразий, динамические системы.

Международная научная конференция организована на основании распоряжения №133-Ф Кабинета Министров Республики Узбекистан от 25 февраля 2019 года.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор:	академик	Аюпов Ш.А.
Ответственные секретари:	д.ф.-м.н.	Бешимов Р.Б.
	PhD.	Мухамадиев Ф.Г.
Члены редколлегии:	академик	Садуллаев А.С.
	профессор	Чилин В.И.
	профессор	Ганиходжаев Р.Н.
	профессор	Нарманов А.Я.
	профессор	Зикиров О.С.
	профессор	Шарипов О.

Ответственные за выпуск:

к.ф.-м.н. Шарипов А.С., к.ф.-м.н. Аслонов Ж.О., к.ф.-м.н. Байтураев А.М., к.ф.-м.н., доц. Джаббаров Г.Ф., к.ф.-м.н., доц. Жураев Т.Ф., PhD. Мухамадиев Ф.Г., PhD. Мамадалиев Н.К., Зойидов А.Н., Дияров Б.Р.

Конференция поддержана грантом ОТ-Ф-4-42 "Кардинальные и топологические свойства пространства полуаддитивных τ -гладких и радоновых функционалов" и Научно-методический центр "Наследие академика Т.Н.Кары-Ниязова"

Abstracts of the international conference

MODERN PROBLEMS OF GEOMETRY AND TOPOLOGY AND ITS APPLICATIONS

ORGANIZING COMMITTEE: Maraximov A.R. - chairman, rector of NUU named after Mirzo Ulugbek,

Ayupov Sh.A. - co-chairman, director of Institute of Mathematics named after V.I.Romanovski,

Beshimov R.B. - Secretary of organizing committee,

Sharipov A.S., Bayturaev A.M., Aslonov J.O., Egamberdiev O., Juraev T.F., Djabbarov G.F., Davletov D.E., Mukhamadiev F.G., Mamadaliev N.K., Zoyidov A.N., Diyarov B.R.

PROGRAM COMMITTEE: Ayupov Sh.A. (Uzbekistan) - Chairman, Azamov A. (Uzbekistan), Artikbaev A. (Uzbekistan), Aripov M. (Uzbekistan), Arpangel'skii A.V. (Russia), Abdushukurov A.A. (Uzbekistan), Beshimov R.B. (Uzbekistan), Barubaev A.A. (Kirgizstan), Bogaty S.A. (Russia), Gevorkyan P.S. (Russia), Durdiev D. (Uzbekistan), Zaitov A.A. (Uzbekistan), Zikirov O.S. (Uzbekistan), Ivanov A.V. (Russia), Iliadis S.D. (Russia), Jabbarov N.M. (Uzbekistan), Kanetov B. (Kirgizstan), Kozlov K.L. (Russia), Kombarov A.P. (Russia), Naidoo Inderasan (South Africa), Abdullaev R.Z. (Uzbekistan), Khudaybergenov K.K. (Uzbekistan), Lomadze V. (Georgia), Narmanov A.Ya. (Uzbekistan), Mamatov M.Sh. (Uzbekistan), Omirov B.A. (Uzbekistan), Petrov N.N. (Russia), Roziqov U.A. (Uzbekistan), Sadovnichiy Yu.V. (Russia), Sadullaev A. (Uzbekistan), Formanov Sh.K. (Uzbekistan), Khadjiev Dj. (Uzbekistan), Chekeev A.A. (Kirgizstan), Shoimqulov B.A. (Uzbekistan), Chatirko V. (Sweden), Chilin V.I. (Uzbekistan), Shchepin E.V. (Russia), Shostak A. (Latvia), Mamatov M.Sh. (Uzbekistan), Khudoyberdiev A.X. (Uzbekistan).

СОДЕРЖАНИЕ

Аюпов Ш.А., Жураев Т.Ф. Пространства Дугунджи и проективно – индуктивно замкнутые функторы в категории <i>Tych</i>	
Abdullaev R.Z., Chilin V.I. Description of isometries of F -spaces <i>Log</i> -integrable functions	10
Abdullaev R.Z., Madaminov B.A. Isomorphisms and isometries of F -spaces of <i>log</i> -integrable measurable functions	11
Abdurasulov K, Bosimova M. Linear integrable deformation of some solvable Lie algebras	13
Abdurasulov K.K., Gaybullayev R.K. Outer derivations of some Lie algebras	15
Alimbetova F. Local derivations of 4-dimensional solvable Leibniz algebras, which nilradical is a Lie algebra	16
Alimov A.A. Lie derivations on the algebras of endomorphisms in Kaplansky-Hilbert modules	18
Aminov B.R., Chilin V.I. Weak continuity of Skew-Hermitian operators in symmetric normed ideals	19
Arif Salimov, Sevil Kazimova Some notes on lifts in symplectic geometry	20
Mohigul Ashurova, Gayrat Beshimov Conditions of the G -equivalence of m -tuples for the group $G = SO(\psi)$ in the two-dimensional bilinear-metric space with the form $\psi(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2$ over the field of rational numbers	20
Aslonov J.O. Second order vector-differential operations	21
Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Yusupov B.B. 2-local derivation on generalized Witt algebras	23
Azamov A.A., Ruzimuradova D.H. Topological properties of unbounded limit sets of dynamical systems	25
Azizov A.N. Symmetric spaces of measurable functions, associated with symmetric sequence spaces	26
Taras Banakh Geometry multiverse	27
Bekbaev U. On n -power-associative two-dimensional algebras	27
Gayrat Beshimov, Erkin Rahmonov A complete system of invariants of m -tuples for the group $SO(2, P)$ in the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 - 2x_2y_2$ over the field of rational numbers	28
Beshimov R.B., Safarova D.T. Uniform space and its hyperspace	29
Beshimov R.B., Zhuraev R.M. Separation axioms of space of the permutation degree	30
Chekeev A.A., Kasymova T.J., Abdiev A.A. The compactification with respect to the strongly delta normal base	31
Chekeev A.A., Kasymova A.B. Uniformities on the free topological groups ...	33
Chilin V.I., Ergasheva D.A. Description of positive isometries on Lorentz spaces	34
Chilin V.I., Karimov J.A. Bloom-Hanson ergodic theorem in $C_\infty(Q)$ -Hilbert-Kaplansky modules	35
Chilin V.I., Muminov K.K. Equivalence of curves in Pseudo-Galilean geometry	36
Eshimbetov M.R., Sobirov Z.A., Akhmedov M.I. The Fokas' method for inverse control problem for heat equation on simple metric graph	37

Eshqobilova D.T. A metric on the space of idempotent probability measures on metrisable space	38
Fomenko T.N. Fixed points and coincidences in ordered sets and game theory ..	39
Georgiou D. N. On statistical convergences of sequences of closed sets in metric spaces	40
Gryzlov A.A. Products and sequences	42
Holboyev A.G. Pursuit-evasion game on the prism and pyramid in the space R^3	42
Iliadis S.D. On spaces continuously containing topological groups	43
Ishmetov A. Ya. On the monad $\mathbb{I}_f$	44
Ivanov A.V. Dimension of finite approximation for metrizable functors	45
Ivanov A.V. On uniformly distributed probability measures on metric compacts	46
Jamilov U.U., Mukhitdinov R.T. On polynomial operators corresponding to graphs	47
Jumaev D. I. τ -II-completeness and hyperspace	48
Jumaniyozov D.E. The second cohomology group of noncommutative Jordan algebra of level one	49
Djavvat Khadjiev, Gayrat Beshimov Complete systems of $SO(2, R)$ -invariants of mappings of a fixed set to the two-dimensional Euclidean space	51
Khakimov O.N. Chaotic behavior of the P -adic Potts-Bethe mapping	52
Khmyleva T., Sukhacheva E. On linear homeomorphism of spaces of continuous functions on Hattori spaces	53
Kholturaev Kh. F. On max-plus-Milutin spaces	53
Khursanov Sh.Y. Generalized α -subharmonic functions	54
Kucharov R.R., Haydarov F.H. On subgroups of the group representation of Cayley tree	56
Kudayberegnoy K.K. Local automorphisms simple Leibniz algebras	57
Malikov N.N. About a solvable Leibniz algebra	58
Mamadaliev N.K., Badrutdinova R.Z. The functional tightness of the space of probability measures of finite support	59
Khudoyor Mamayusupov Deformation space of cubic parabolic Newton maps .	60
Meyliev Sh., Mukhamadiev F. The psuedo weight and the π -weight of Hattori spaces	61
Mukhamadiev F.G. The psuedo weight and the π -weight of φ_τ -superkernel topological spaces	62
Muminov K.K., Gafforov R.A. Systems of matrix differential equations for $SO(n, p, C)$ - equivalent surfaces	63
Murodov Sh.N. On new classes of two-dimensional chains of evolution algebras	64
A.Narmanov On the group of diffeomorphisms of foliated manifolds	65
Erkin Rahmonov, Djavvat KHADJIEV A description of the group of all form-preserving transformations of the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 - 2x_2y_2$ over the field of rational numbers	67
Rajabov E.O. Geometry of orbits of conformal vector fields	68
Rakhmonov Z.R., Mukhammadiev Sh.J. On the properties of the solution of filtration system coupled via nonlinear boundary flux	69
Rashidova F.F. Derivation of Witt algebra	70
Rassadin A.E. Fenchel and Fary-Milnor Inequalities in Analysis of One-Dimensional Hamiltonian Systems	72
Rozikov U.A. Gibbs measures of Soft-Core Widom-Rowlinson model on Cayley trees	73

Rozikov.U.A., Shoyimardonov S.K. The limit behavior of the discrete-time Leslie Predator-Prey model	74
Rozikov U.A., Usmonov J.B. On a piecewise-continuous dynamical system ...	75
Yu. V. Sadovnichy On some properties of alternating measure functors	76
Sadullaev A., Mukhamadiev F. The psuedo weight and the π -weight of space of the permutation degree	77
Sevara SAFAROVA, Djavvat KHADJIEV Invariants of m -tuples for the group of all linear similarities in the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 - 5x_2y_2$ over the field of rational numbers	78
Safarov U. Circle maps with non-flat critical point	79
Samatov B.T., Soyibboev U.B. A pursuit problem in the Pontryagin example with Gronwall type constraint	80
Vitalij A. Chatyrko and Dmitri B.Shakhmatov Automorphism groups of dense subgroups of R^n	81
Shakhobiddinova Z., Kurakbaev Sh., Eshtemirova SH. The psuedo weight and the π -weight of the space Nemytskii plane	82
Sharipov X.F. Second order differential invariants of submersions	83
Shchepin E.V. Integral in Non-Stantard Calculus	84
Shermatova Z.Kh. Characteristically nilpotent Leibniz algebras	84
Solijanova G.O. An Potential Solvable Lie Algebra with Potential Nilpotent Lie Ideal	85
Tagaymuratov A. O. On a new metric on the space of probability measures ...	86
Tashpulatov S.M. Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model fourth doublet state	87
Yuldasheva A.V. The linear peridinamic model in elasticity theory	88
Zaitov A. A. Statistical metric spaces	89
Абдухакимов С.Х. Отображения Пуанкаре для некоторых критических отображений окружности	90
Абдурахимов А. О реактор в псевдожизненном слое	91
Адашев Ж.К. Разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом .	92
Алдай М. Свойства полулинейного дифференциального уравнения второго порядка	95
Г. Аманкелдиева, М.В. Долгополов О дзета-функции Римана, ее топологических свойствах и обобщениях	96
Артикбаев А. О внутренней геометрии поверхности в Галилеевом пространстве	97
Артикбаев А; Исмоилов Ш.Ш. О применение решения уравнение Монжа-Ампера в экономике	98
Атоева Мухаббат Компактная открытая топология	99
Bayturalayev A.M, Annayev N.U. О структуре множества субмерсий	100
Бешимова Д.Р., Умарова У.У., Бешимова Ш.Х. $exp_n X$ - пространства и cs -сеть	101
Бешимова Д.Р., Яздонов Д.Э. Топологическое пространство с конечной топологией	102
Богатый С.А. Многомерная группа Дженнингса	103
Болтаев Х.Х. Индекс произвольного вещественного подфактора W^* -алгебры	103
Борубаев А.А., Намазова Г.О. Равномерные структуры и Хьюитовские расширения	105

Борубаев А.А. Категорные методы в равномерной топологии	106
Bozarov D. U. Функтор единичного шара пространства знакопеременных мер с конечным носителем и бесконечной степенью	107
Т. Бултаков О некоторых свойствах частично упорядоченных линейных алгебр	108
Буваев К.Т. Обобщенная локализация для кратных рядов Фурье	109
Дадажанов Р.Н., Каримова Н.Р. О вычислимости алгоритмических представлений некоторых типов абстрактных моделей данных в нижних классах иерархии Клини—Мостовского	110
Джаббаров Г.Ф., Жабборов М.М. Метризация пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов	112
Дуйсенгалиева Б.А., Науразбекова А.С. Пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов ранга 2	114
Файзиев Ю.Э., Рахимов А.А. Об одной задаче управления для уравнений дробного порядка в стержне	115
Фролкина О.Д. Канторовы множества с многомерными проекциями	117
Гензе Л.В. Свободные абелевы n -периодические топологические группы	118
А.В. Гурская, М.В. Долгополов, Т.Ф. Жураев, В.А. Макеева Исследование потенциала Хиггса расширений стандартной модели с нарушением CP -инвариантности методами топологии, геометрии и теории катастроф	119
Ибодуллаева Н.М. Некоторые частные случаи обобщенной кривизны поверхности	121
Исломов Б.И., Абдуллаев О.К. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с оператором Римана-Лиувилля	122
Исмоилов Ш.Ш. О существовании решения уравнения Монжа-Ампера внутри сферы изотропного пространства	123
Жабборов Н.М., Хурсанов Ш.Я. Аналог теоремы Харнака в классе А-гармонических функций	123
Т.Ф.Жураев, Ф.Исмагуллаев О гомотопически плотных подпространствах пространства вероятностных мер определенных бесконечных компактах	126
Джураев Ф.М. Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа	127
К.Р.Жувонов, Еркулов Р., Б.Ж. Олимов О C -вложенности подпространств $\eta_F(X)$ в компактах $F(X)$	128
Канетов Б.Э., Канетова Д.Э. О полноте равномерных пространств	129
Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А. Об одной проблеме теории алгоритмических представлений универсальных конгруэнц-простых алгебр ..	130
Хажиев И. Некорректная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с одной линией вырождения	132
Хакимов Р., Махаммадалиев М. Условия неединственности слабо периодических мер Гиббса для НС-модели	133
Кобилев Т.А. Экстенд гиперпространства сходящейся под последовательностей	135
Комбаров А.П. Нормальные функторы и обобщения нормальности	136
Костин А.В. О взаимосвязях между геометриями псевдосфер в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах	136
Костин А.В., Костина Н.Н. Обобщения задачи о тени в гиперболическом пространстве	137

Кучков Э. И. О спектральных разложениях кусочно-гладких функций ..	138
Курбанов Х. Х. О взаимосвязи функторов емкостей и положительно- однородных функционалов	139
К.А.Курганов, Ф.А.Юсупов Динамика некоторых квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа	140
Лейбо И.М. О равенстве размерностей для пространства Нагаты	141
М.М.Мадиримов, М.М. Баракаев, У.М.Санакулов О гомотопически плотных подпространствах пространства всех вероятностных мер с конечными носителями	142
Мадрахимов Р.М., Омонов О.И. Критерии плюригармоничности M – гармонических функций	143
Мамадалиев Н.А. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх	145
Мамадалиев У. Х. Описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом имеющий характеристический последовательность (m_1, m_2)	148
Маматов М.Ш., Зуннунов А.О., Эсонов Э.Э. Задача лев и человек в присутствии препятства	151
Матякубов М.М., Жуманиёзова Г.Х., Хасанов Т.Г. Об интегрировании одного нагруженного уравнения кортевега-де фриза в классе периодических функций	152
Меражова Ш.Б., Азимова Д.О., Хасанова Х.Х. О численном решении обратных задач для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа: одномерный случай	153
Микеш Й., Гинтерлейтнер И., Гусева Н.И. Геодезические отображения на Риччи плоские пространства	155
Нарманов А., Каипназарова Г, Дияров Б. Теоремы стабильности для слоений	156
Нарманов О. Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности	157
Нарзиллаев Н. Ψ -плюрисубгармоническая мера	159
Неъматова Ш.Б., Расулов Т.Х. Условия существования собственных значений молекулярно-резонансной модели с трехмерным возмущением	160
Номозова Х.М., Шодмонова Ф.З. Принцип компактности для A - гармонических функций при случае $A \equiv const$	161
Н.Э. Музаффар, М.В. Долгополов Максимальные инъективные вещественные Свойства инъективности	162
Пармонов Х.Ф., Киличов О.Ш. О геометрии Гамильтоновых симметрий .	163
Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентных дифференциальных играх	164
Полатов А.М., Икрамов А.М., Пулатов С.И. Метод дискретизации области сложной конфигурации	165
Qosimov O.Yu. О геометрии сингулярных слоений	167
Кудратов Х.Э., Тошкулов Х.А. О неравенствах для моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией	168
А.Х.Рахматуллаев, Б.Г. Назаров О гомеоморфности подпространств пространства вероятностных мер в компактных пространствах	169

Расулова М.А. H_A –периодические основные состояния для модели Поттс-SOS на дереве Кэли	169
Сабыканов А.А., Микеш Й., Пешка П. О рекуррентных проективно Евклидовых пространствах	171
Сафаров Т.Н. Условие седлообразности циклических поверхностей	172
Саитова С.С. Топологическая структура времени вселенной событий и множества достижимости	172
Сапарбаева Д.А. Кривизна многообразия $SO(3)$	174
Шарипов А. Об одной группе диффеоморфизмов слоеных многообразий ...	175
Шарипов А.С., Олломова Х.Т. О геодезических линий слоеных многообразий	176
Шеркузиев М. О бесконечно малых эквиариальных деформациях поверхности	177
Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В. О кривизне-кручении пространства со связностью Картана	178
Собиров Ж.А. О внутренней геометрии поверхности Галилеева пространства	179
Султанов Б.М. Поверхности, определяемые символами Кристоффеля	180
Темирханова А.М. Ограниченность и компактность одного класса матричных операторов с переменными пределами суммирования	181
Тухтасинов М. О некоторых свойствах многозначного отображения	183
Тухтасинов М., Хайиткулов Б.Х. Полное решение задачи конфликта с интегрально-ограниченным и импульсным управлением для одного класса дифференциальных игр	185
Турдиев Ш.Р. Сеть пространства	187
Турдиев Х., Хайитова Х. Задача восстановления поверхности от произведенной проекции источника	188
З.О. Турсунова, У.Т. Ражабов О Z -свойствах пространства вероятностных мер с конечными носителями определенных бесконечном компакте	189
Хусенов Б.Э. Аналог теоремы А.М.Кытманова для $A(z)$ -аналитических функций	190
Яхшибоев М.У., Нарзуллаев У.Х. О дробном интегрировании типа Адамара функций многих переменных	191
Едгаров С. Ж. О непараметрическом оценивание распределение компоненты свертки	192
Зикиров О. С., Рахматов Н. Б. Об одной задаче с интегральными условиями для уравнения гиперболического типа	193
Зойидов А.Н. О геометрии римановы субмерсии над плоскими многообразиями	194
Do'stova Sh., Beshimova D. Davriy orbitalar orqali hosil bo'lgan qo'zg'almas va davriy orbitalar	195
Ibragimov N. Talabalarining matematik qobiliyatlarini geometrik masalalar yechish yordamida rivojlantirish	196
Narmuratov N.K. Xorazmiy ishlarida noelementar matematika	197
Quralov D.E. Galiley tekisligida uchburchak yuzasidan hosil qilinadigan ba'zi xossalalar	199
Xatamov I.M. Noyevklid geometriyasida asosiy tushunchalar	200
МАРДОН АЮБОВИЧ СОБИРОВ	201

Пространства Дугунджи и проективно – индуктивно замкнутые функторы в категории *Tych*.

Аюпов Ш.А., Жураев Т.Ф.

Институт математики АНРУз, ТГПУ, Ташкент, Узбекистан.

e-mail: sh_ayupov@mail.ru, tursunzhuraev@mail.ru

В данной заметке рассматриваются пространства Дугунджи [1] и проективно-индуктивно замкнутые функторы [2] в категории *Tych* – тихоновских пространств и непрерывных отображений в себя. Исследуются геометрические и топологические свойства пространств Дугунджи при воздействии на них этих функторов в рассматриваемой категории.

Данная работа является продолжением работы [3-4] для конкретных проективно – индуктивно замкнутых функторов и пространств Дугунджи и Милютина.

Нами получены следующие

Теорема 1. Проективно – индуктивно замкнутые функторы F в категории *Tych* сохраняет R – компактные пространства.

Теорема 2. Проективно- индуктивно замкнутые функторы в категории *Tych* сохраняет пространств Дугунджи и Милютина.

Теорема 3. Локально выпуклые подфункторы F функтора P_n вероятностных мер $c \leq n$ носителями сохраняет пространств Дугунджи и Милютина.

Литература

1. Жураев Т.Ф. Пространства Дугунджи и абсолютные экстензоры в категории *Tych*. Бюлетень Института Математики, 2019, №5, стр.22-27.
2. Zhuraev T.F. On paracompact spaces, projectively inductively closed functors, and dimension *Mathematica AETERNA*, 2015,V-5, №1, pp.175-189.
3. Аюпов Ш.А., Жураев Т.Ф. О проективно индуктивно замкнутых подфункторах функтора P вероятностных мер. Тезисы докладов конференции Проблемы современной топологии и ее приложения, Ташкент, 2017, с. 13-15.
4. Аюпов Ш.А., Жураев Т.Ф. Абсолютные экстензоры на категории *Tych* и пространства Дугунджи. Тезисы докладов конференции Проблемы Современной топологии и ее приложения, Ташкент, 2018, с.7-8.

Description of isometries of F -spaces *Log-integrable functions*

Abdullaev R.Z., Chilin V.I.

Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Republic of Uzbekistan

e-mail: arustambay@yandex.com

National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

e-mail: vladimirchil@gmail.com

Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a measure space with finite measure μ , and let $L_0(\Omega, \mu)$ be the algebra of equivalence classes of real valued measurable functions on $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Following to [1], we consider in $L_0(\Omega, \mu)$ the subalgebra $L_{\log}(\Omega, \mu) = \{f \in L_0(\Omega, \mu) : \int_{\Omega} \log(1 + |f|) d\mu < \infty\}$.

$+\infty\}$ of log-integrable measurable functions, and for each $f \in L_{\log}(\Omega, \mu)$, we set $\|f\|_{\log} = \int_{\Omega} \log(1 + |f|) d\mu$. A non-negative function $\|\cdot\|_{\log} : L_{\log}(\Omega, \mu) \rightarrow [0, \infty)$ is a F -norm on the linear space $L_{\log}(\Omega, \mu)$, and a set $L_{\log}(\Omega, \mu)$ is a complete metric topological vector space with respect to the metric $\rho(f, g) = \|f - g\|_{\log}$ (see, for example, [2]).

The following Proposition establishes the "disjointness" property for linear isometries $U : L_{\log}(\Omega, \mu) \rightarrow L_{\log}(\Omega, \mu)$.

Proposition 1. *Let $U : L_{\log}(\Omega, \mu) \rightarrow L_{\log}(\Omega, \mu)$ be a linear isometry. Then for any $f, g \in L_{\log}(\Omega, \mu)$ such that $f \cdot g = 0$ the equality $U(f) \cdot U(g) = 0$ is true.*

Using Proposition 1 we get the following full description of linear isometries $U : L_{\log}(\Omega, \mu) \rightarrow L_{\log}(\Omega, \mu)$.

Teopema 1. *Let U be a linear isometry in F -space $L_{\log}(\Omega, \mu)$. Then there exists an injective σ -additive homomorphism $\Phi : L_0(\Omega, \mu) \rightarrow L_0(\Omega, \mu)$ such that $U(f) = U(\chi_{\Omega}) \cdot \Phi(f)$ for each $f \in L_{\log}(\Omega, \mu)$. In addition, $|U(\chi_{\Omega})| = -1 + 2 \cdot \frac{d\lambda}{d\mu}$, where $\lambda(\Phi(\chi_A)) = \mu(\chi_A)$, $A \in \mathcal{A}$ and $\frac{d\lambda}{d\mu}$ is the Radon-Nikodym derivative of measure λ with respect to the measure μ (here χ_A is the characteristic function of a set A).*

The following Corollary refines Theorem 1 for surjective linear isometries.

Corollary 1. *Let $U : L_{\log}(\Omega, \mu) \rightarrow L_{\log}(\Omega, \mu)$ be a surjective linear isometry. Then there exists an isomorphism $\Phi : L_0(\Omega, \mu) \rightarrow L_0(\Omega, \mu)$ such that $U(f) = U(\chi_{\Omega}) \cdot \Phi(f)$ for each $f \in L_{\log}(\Omega, \mu)$, in particular, $\Phi(L_{\log}(\Omega, \mu)) = L_{\log}(\Omega, \mu)$.*

Let now ν be a finite measure on σ -algebra $\mathcal{A}$ such that $\nu(A) = 0 \iff \mu(A) = 0$, that is, the measures μ and ν are equivalent. In this case, $L_0(\Omega, \mu) = L_0(\Omega, \nu)$.

Using Corollary 1, we have the following criterion for isometric of the F -spaces $L_{\log}(\Omega, \mu)$ and $L_{\log}(\Omega, \nu)$.

Teopema 2. *The F -spaces $L_{\log}(\Omega, \mu)$ and $L_{\log}(\Omega, \nu)$ are isometric if and only if there exists a measure preserving isomorphism $\varphi : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\Omega, \mathcal{A}, \nu)$.*

References

- [1]. Dykema K., Sukochev F., Zanin D., Algebras of log-integrable functions and operators. Complex Anal. Oper. Theory, Vol. 10 (2016), No 8, pp. 1775–1787.
- [2]. Kalton N.J., Peck N.T., An F -space sampler. London Math. Society lecture series, Cambridge University Press, 1984.

Isomorphisms and isometries of F -spaces of log-integrable measurable functions

Abdullaev R.Z., Madaminov B.A.

e-mail: arustambay@yandex.com, aabekzod@mail.ru

Let $\nabla = \nabla_{\mu} = \nabla_{\nu}$ be a complete Boolean algebra, μ and ν be finite equivalent measures on ∇ . The main purpose of this paper is to prove the absence of surjective isometries from $L_{\log}(\nabla_{\mu})$ onto $L_{\log}(\nabla_{\nu})$ in the case when measures μ and ν are equivalent [1]. Also studied the relationship between isometric and isomorphic algebras $L_{\log}(\nabla_{\mu})$ and $L_{\log}(\nabla_{\nu})$.

Let $h = \frac{d\nu}{d\mu}$ be the Radon-Nikodym derivative of measure ν with respect to the measure

μ and let

$$L_p(\nabla_\mu) = \{f \in L_0(\nabla_\mu) : \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

$$L_p(\nabla_\nu) = \{f \in L_0(\nabla_\nu) : \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\Omega} h \cdot |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

If $\mu \neq \nu$ then $\mu(\{h \neq 1\}) > 0$, where $1(\omega) = 1$ (μ -almost everywhere). In this case the map $U : L_p(\nabla_\mu) \rightarrow L_p(\nabla_\nu)$, defined by the following equality

$$U(f) = h^{-\frac{1}{p}} f, \quad f \in L_p(\nabla_\mu),$$

is the non trivial surjective isometry from $L_p(\nabla_\mu)$ onto $L_p(\nabla_\nu)$ [2].

Bellow we show that this statement is not true for F -spaces $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$.

Let Ω unit element in ∇ [3], then

$$\begin{aligned} L_{\log}(\nabla_\nu) &= \{f \in L_0(\nabla) : \int_{\Omega} \log(1 + |f|) d\nu < +\infty\} = \\ &= \{f \in L_0(\nabla) : \int_{\Omega} h \cdot \log((1 + |f|)) d\mu < +\infty\} = \\ &= \{f \in L_0(\nabla) : \int_{\Omega} \log((1 + |f|)^h) d\mu < +\infty\}, \end{aligned}$$

and

$$\|f\|_{\log, \nu} = \int_{\Omega} \log(1 + |f|) d\nu = \int_{\Omega} \log((1 + |f|)^h) d\mu.$$

Теорема 1. Let ∇ be a complete homogeneous Boolean algebra, μ and ν be finite equivalent measures on ∇ . If $\frac{\int_{\Omega} h(x) d\mu}{\mu(\Omega)} = 1$ if and only if, then $L_{\log}(\nabla_\mu)$ is isometric to $L_{\log}(\nabla_\nu)$.

Then from Theorem 1 we obtain.

Теорема 2. Let ∇ be a complete homogeneous algebra, μ and ν be finite equivalent measures on ∇ , and $h = \frac{d\nu}{d\mu}$. Then

(i) $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are isometric;

(ii) $\frac{\int_{\Omega} h(x) d\mu}{\mu(\Omega)} = 1, \forall i \in \mathbb{N}$;

(iii) $\frac{\int_{\Omega} h^{-1}(x) d\nu}{\nu(\Omega)} = 1, \forall i \in \mathbb{N}$ where $h^{-1} = \frac{d\mu}{d\nu}$;

(iv) $\nu(\Omega) = \mu(\Omega), \forall i \in \mathbb{N}$;

(v) there is a measure-preserving automorphism α from ∇_μ onto ∇_ν .

Let ∇ be a complete homogeneous Boolean algebra, μ and ν are equivalent measures on ∇ , $h = \frac{d\nu}{d\mu}$. We introduce the following notation:

- by $C_1(h)$ we denote the fulfillment of the conditions $\frac{\int_{\Omega} h(\Omega) d\mu}{\mu(\Omega)} = 1$;

- by $C_2(h)$ we denote the fulfillment of the conditions h и h^{-1} are bounded.

Then from Theorem 1 and ([4], Theorem 2) we obtain.

Теорема 3. Let ∇ be a complete homogeneous Boolean algebra, μ and ν be finite equivalent measures on ∇ . Then the following statements hold:

(i) $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are isometric and $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are isomorphic if and only if the conditions $C_1(h)$ and $C_2(h)$ are satisfied.

(ii) $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are isometric and $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are non isomorphic if and only if the condition $C_1(h)$ is satisfied, but $C_2(h)$ is not satisfied.

(iii) $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are non isometric and $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are isomorphic if and only if the condition $C_1(h)$ is not satisfied, but $C_2(h)$ is satisfied.

(iv) $L_{\log}(\nabla_\mu)$ и $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are non isometric and $L_{\log}(\nabla_\mu)$ and $L_{\log}(\nabla_\nu)$ are non isomorphic if and only if the conditions $C_1(h)$ and $C_2(h)$ are not satisfied.

Литература

[1]. R.Abdullaev, V.Chilin, B.Madaminov *Isometric F -spaces of log-integrable function*. arXiv:1909.11876v1 [math.FA] 26.sep. 2019.

[2]. F.J. Yeadon, *Isometries of non-commutative L_p -spaces*. Math. Proc.Camb. Phil. Soc. 90 (1981) 41-50.

[3]. Dykema, F. Sukochev, D. Zanin, *Algebras of log-integrable functions and operators*. Complex Anal. Oper. Theory **10** (8) (2016), 1775–1787.

[4]. R.Z. Abdullaev, V.I. Chilin, *Isomorphic Classification of $*$ -Algebras of Log-Integrable Measurable Functions*. Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **264**, 73-83. Springer, Cham.

Linear integrable deformation of some solvable Lie algebras

Abdurasulov K, Bosimova M.

Institute of Mathematics Academy of Science of Uzbekistan, Tashkent
National University of Uzbekistan, Tashkent

Classical deformation theory of associative and Lie algebras began in Gerstenhaber [1] and Nijenhuis-Richardson [2] in the 1960s. They studied the one-parameter deformations and established the connection between the cohomology and infinitesimal deformations of Lie algebra. After these works formal deformation theory was generalized in different categories. In fact, in the last fifty years, the deformation theory has played an important role in algebraic geometry. The main goal is the classification of families of geometric object when the classifying space (the so called moduli space) is a reasonable geometric space. In particular, each point of our moduli space corresponds to one geometric object (class of isomorphism). The theory of deformations is one of the most effective approaches in the investigation of solvable and nilpotent Lie algebras.

Definition 1. A Lie algebra L over K is a vector space together with a bilinear map,

$$[-, -] : L \times L \rightarrow L$$

satisfying the following two identities:

$$[x, x] = 0,$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

for all $x, y, z \in L$.

Bilinear maps $\varphi : L \times L \rightarrow L$ and $f : L \times L \rightarrow L$ is called second cocycles and coboundaries, respectively if it is satisfied the following conditions:

$$[x, \varphi(y, z)] + [y, \varphi(z, x)] + [z, \varphi(x, y)] + \varphi(x, [y, z]) + \varphi(y, [z, x]) + \varphi(z, [x, y]) = 0$$

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$$

and

$$f(x, y) = [d(x), y] + [x, d(y)] - d([x, y]), \quad \text{for some linear map } d : L \rightarrow L.$$

The set of second cocycles and the second coboundaries are denoted by $Z^2(L, L)$ and $f \in B^2(L, L)$, respectively. It should be noted that $B^2(L, L) \subseteq Z^2(L, L)$ and the quotient space $H^2(L, L) = ZL^2(L, L)/B^2(L, L)$ is called the second group cohomology of L .

A deformation of a Lie algebra L is a one-parameter family L_t of Lie algebras with the bracket

$$\mu_t = \mu_0 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots,$$

where φ_i are 2-cochains, i.e., elements of $\text{Hom}(L \otimes L, L) = C^2(L, L)$ and $\varphi_i \in ZL^2(L, L), \varphi_i \notin BL^2(L, L)$

Consider following 10-dimensional Lie algebra:

$$L_{10} : \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, e_3] = e_5, & [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_4, e_3] = e_7, & [e_6, e_1] = -e_7, \\ [e_1, x_1] = e_1, & [e_4, x_1] = e_4, & [e_5, x_1] = e_5, & [e_7, x_1] = e_7, \\ [e_2, x_2] = e_2, & [e_4, x_2] = e_4, & [e_6, x_2] = e_6, & [e_7, x_2] = e_7, \\ [e_3, x_3] = e_3, & [e_5, x_3] = e_5, & [e_6, x_3] = e_6, & [e_7, x_3] = e_7, \end{cases}$$

In the following proposition we calculate the second group cohomology of the algebra L_{10} .

Proposition 1. $\dim H^2(L_{10}, L_{10}) = 1$ and the following cocycle form a basis of the second group cohomology:

$$\begin{cases} \varphi(e_4, e_3) = -e_7, \\ \varphi(e_2, e_5) = e_7, \end{cases}$$

Now consider a deformation of the algebra L_{10} .

Proposition 2. A linear integrable deformation of L_{10} consist the following algebras:

$$R_{10}(t) : \begin{cases} [e_1, e_2] = e_4, & [e_1, e_3] = e_5, & [e_2, e_3] = e_6, \\ [e_4, e_3] = (1-t)e_7, & [e_1, e_6] = e_7, & [e_2, e_5] = te_7, \\ [e_1, x_1] = e_1, & [e_4, x_1] = e_4, & [e_5, x_1] = e_5, & [e_7, x_1] = e_7, \\ [e_2, x_2] = e_2, & [e_4, x_2] = e_4, & [e_6, x_2] = e_6, & [e_7, x_2] = e_7, \\ [e_3, x_3] = e_3, & [e_5, x_3] = e_5, & [e_6, x_3] = e_6, & [e_7, x_3] = e_7, \end{cases}$$

References

1. M.Gerstenhaber, *On the deformation of rings and algebras I,II*, Ann. of Math.(2) 79 (1964) p. 59–103.
2. A.Nijenhuis, R.W.Richardson, *Cohomology and deformations in graded Lie algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) p. 1–29 .

Outer derivations of some Lie algebras

Abdurasulov K.K., Gaybullayev R.K.

*Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: abdurasulov0505@mail.ru, r_gaybullaev@mail.ru*

This thesis is devoted to determine outer derivations of Lie algebras with dimension of the complementary space being less than the number of generator elements of the nilradical.

Definition 1. A vector space with a bilinear bracket $(G, [-, -])$ over a field $\mathbb{F}$ is called a Lie algebra if for any $x, y, z \in G$ the following conditions hold:

1. $[x, y] = -[y, x]$ (antisymmetry),
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi identity).

For a given Lie algebra $(G, [-, -])$ the lower central and the derived series are defined recursively as follows:

$$G^1 = G, \quad G^{k+1} = [G^k, G], \quad k \geq 1, \quad G^{[1]} = G, \quad G^{[s+1]} = [G^{[s]}, G^{[s]}], \quad s \geq 1.$$

Definition 2. Algebra G is said to be solvable (respectively, nilpotent) if there exists $m \in \mathbb{N}$ (respectively, $s \in \mathbb{N}$) such that $G^{[m]} = 0$ ($G^s = 0$).

The maximal nilpotent ideal of an algebra is called a nilradical.

Definition 3. A linear map $d: G \rightarrow G$ of a Lie algebra $(G, [-, -])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in G$, the following condition holds:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

The set of all derivations of G is denoted by $\text{Der}(G)$. The set $\text{Der}(G)$ is a Lie algebra with respect to the commutator.

For a given element x of a Lie algebra G , the right multiplication operator $ad_x: G \rightarrow G$, defined by $ad_x(y) = [y, x]$, $y \in G$ is a derivation. These derivations are said to be inner derivations.

Set

$$N_{max} = \{N | N - \text{nilpotent Lie algebra, } R = N \dot{+} Q, \text{ where } \dim Q = \dim N / N^2\}.$$

Theorem 1. Let $R = N_{max} \dot{+} Q$ be a solvable Lie algebras and $\dim Q = s$, $\dim N / N^2 = k$, $s < k$. Then there exists $d \in \text{Der} R \setminus \text{Inner} R$.

References

- [1]. Mubarakzjanov G.M., On solvable Lie algebras (Russian), *Izv. Vysš. Učehn. Zaved. Matematika*, 1963, 114–123.
- [2]. Gantmacher F., Canonical representation of automorphisms of a complex semisimple Lie group, *Rec. Math. Moscou*, 5(47), 101–146 (1939).
- [3]. Ladra M., Rikhsiboev I.M., Turdibaev R., Automorphisms and derivations of Leibniz algebras, *Ukrainian Mathematical Journal* Vol. 68, No. 7, 2016, pp. 933–944.
- [4]. Leger G., Derivations of Lie algebras III, *Duke Mathematical Journal*, Volume 30, Number 4 (1963), pp. 637–645.
- [5]. Sh.A. Ayupov and B.A. Omirov, On Leibniz algebras, in *Algebra and Operator Theory*, M.G. Yuspud-Jan Khamkimdjanov and S.A. Ayup, eds., Kluwer, Dordrecht, 1998, pp. 1–12.
- [6]. J. M. Casas, M. Ladra, B. A. Omirov and I.A. Karimjanov, Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical. *Linear and Multilinear Algebra*, 2013 Vol. 61, No. 6, 758–774
- [7]. Khalkulova Kh.A., Abdurasulov K.K., Solvable Lie algebras with maximal dimension of complementary space to nilradical, *Uzbek Mathematical Journal*, No 1, 2018, pp. 90–98.

Local derivations of 4-dimensional solvable Leibniz algebras, which nilradical is a Lie algebra

Alimbetova F.

National University of Uzbekistan, Tashkent.

e-mail: f.a.d.0404@mail.ru

The notions of local derivations were first introduced in 1990 by R.V.Kadison [1]. In [2] Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations. Local derivations of some solvable Lie algebras investigated in [3].

Leibniz algebras were introduced by Loday in [4] as a non-antisymmetric version of Lie algebras. In [5] Local derivation of Leibniz algebras are investigated and it is proved that all local derivations on a finite-dimensional complex simple Leibniz algebra are automatically derivations. Moreover, it is shown that nilpotent Leibniz algebras as a rule admit local derivations which are not derivations. In this work we investigate local derivations of some 4-dimensional solvable Leibniz algebras.

Definition 1. A Leibniz algebra over K is a vector space $\mathcal{L}$ equipped with a bilinear map, called bracket,

$$[-, -] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$$

satisfying the Leibniz identity:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

for all $x, y, z \in \mathcal{L}$.

For a given Leibniz algebra $(\mathcal{L}, [-, -])$ the sequences of two-sided ideals defined recursively as follows:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}], k \geq 1,$$

$$\mathcal{L}^{[1]} = \mathcal{L}, \mathcal{L}^{[s+1]} = [\mathcal{L}^{[s]}, \mathcal{L}^{[s]}], s \geq 1.$$

are said to be the lower central and the derived series of $\mathcal{L}$, respectively.

Definition 2. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is said to be nilpotent (respectively, solvable), if there exists $n \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) such that $\mathcal{L}^n = 0$ (respectively, $\mathcal{L}^m = 0$). The minimal number n (respectively, m) with such property is said to be the index of nilpotency (respectively, of solvability) of the algebra $\mathcal{L}$.

Definition 3. The maximal nilpotent ideal of a Leibniz algebra is said to be the nilradical of the algebra.

Definition 4. A linear map $d : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ of a Leibniz algebra $(\mathcal{L}, [-, -])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in \mathcal{L}$ the following condition holds:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Definition 5. A linear operator Δ is called a local derivation if for any $x \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $d_x : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ such that $\Delta(x) = d_x(x)$.

In [6] the classification of 4-dimensional solvable Leibniz algebras is given. In this work we consider 4-dimensional solvable Leibniz algebras whose nilradical is a 3-dimensional Lie algebra. It is known that there are three 4-dimensional solvable Leibniz algebras, whose nilradical is Lie algebra:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\gamma) : \quad & [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, x] = e_1, & [e_2, x] = \gamma e_2, \\ & [e_3, x] = (1 + \gamma)e_3, & [x, e_1] = -e_1, & [x, e_2] = -\gamma e_2, & [x, e_3] = -(1 + \gamma)e_3; \\ \mathcal{L}_2 : \quad & [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, x] = e_1, & [e_2, x] = -e_2, \\ & [x, e_1] = -e_1, & [x, e_2] = e_2, & [x, x] = e_3; \\ \mathcal{L}_3 : \quad & [e_1, e_2] = e_3, & [e_2, e_1] = -e_3, & [e_1, x] = e_1 + e_2, & [e_2, x] = e_2, \\ & [e_3, x] = 2e_3, & [x, e_1] = -e_1 - e_2, & [x, e_2] = -e_2, & [x, e_3] = -2e_3. \end{aligned}$$

Proposition: Algebras $\mathcal{L}_1(\gamma)$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ admit local derivations which are not derivations.

References

1. Kadison R.V. *Local derivations*, Journal of algebra, 1990, Vol. 130, p. 494–530.
2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., *Local derivations on finite-dimensional Lie algebras*, Linear Alg. and Appl., 2016, Vol. 493, p. 381–388.
3. Ayupov Sh.A., Khudoyberdiyev A.Kh. *Local derivations on Solvable Lie algebras*. Linear Mult. Algebra, 2019. doi:10.1080/03081087.2019.1626336.
4. Loday J.-L., *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*, Enseign. Math. (2), 39(3-4), 1993, p. 269–293.
5. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Omirov B.A. *Local and 2-Local Derivations and Automorphisms on Simple Leibniz Algebras*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2019. doi:10.1007/s40840-019-00799-5.
6. Canete E.M., Khudoyberdiyev A.Kh. *The classification of 4-dimensional Leibniz algebras* Linear Algebra and Appl., 439 (1) 2013 p. 273–288.

Lie derivations on the algebras of endomorphisms in Kaplansky-Hilbert modules

Alimov A.A.

*Tashkent Institute of design, construction and maintenance of automobile roads,
Tashkent, Republic of Uzbekistan
e-mail:alimovakrom63@yandex.com*

Let ∇ be complete Boolean algebra with the unity $\mathbf{1}$ and let Q be a Stone compact corresponding to ∇ . Denote by $C_\infty(Q)$ a commutative algebra of all continuous functions $f : Q \rightarrow [-\infty, +\infty]$, taking the values $\pm\infty$ only on nowhere dense sets in Q (see, for example, [2, Section 1.4.2]). Let $\mathcal{A}$ be an algebra $C_\infty(Q)$ or $C_\infty(Q) \oplus i \cdot C_\infty(Q)$, $i^2 = -1$.

Let $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ be the Kaplansky-Hilbert $\mathcal{A}$ -module with $\mathcal{A}$ -valued inner product $\langle \cdot | \cdot \rangle$ and with norm $\|x\|_X = \sqrt{\langle x | x \rangle}$, $x \in X$ (see, for example, [1]). A set $\mathcal{E} \subset X$ is called the orthonormal basis in X , if $\langle x | y \rangle = 0$, $x \neq y$ and $\langle x | x \rangle = \mathbf{1}$ for all $x, y \in \mathcal{E}$, and the equality $\langle x | z \rangle = 0$ for all $x \in \mathcal{E}$ and a fixed $z \in X$ implies $z = 0$. The Kaplansky-Hilbert module $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ is called λ -homogeneous if X has the orthonormal basis $\mathcal{E}$ such that $\text{card } \mathcal{E} = \lambda$. We say that the Kaplansky-Hilbert module $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ is an essentially infinite-dimensional, if for every nonzero $e \in \nabla$ the Kaplansky-Hilbert module $e \cdot X$ over the algebra $e \cdot \mathcal{A}$ is not n -homogeneous for any positive integer n .

A linear operator $T : X \rightarrow X$ is called an endomorphism in X , if there exists $0 \leq f \in \mathcal{A}$, such that $\|Tx\|_X \leq f \cdot \|x\|_X$ for all $x \in X$. The $\mathcal{A}$ -module of all endomorphisms in X is denoted by $B(X)$. It is clear that $B(X)$ is an algebra over field $\mathbb{R}$ (respectively, $\mathbb{C}$) in the case $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ (respectively, $\mathcal{A} = C_\infty(Q) \oplus i \cdot C_\infty(Q)$).

A linear operator $D : B(X) \rightarrow B(X)$ is called (an associative) derivation if $D(TS) = D(T)S + TD(S)$ for all $T, S \in B(X)$. Every element $T \in B(X)$ defines a derivation D_T on $B(X)$ given by $D_T(S) = TS - ST = [T, S]$, $S \in B(X)$. Such derivation D_T is called the inner derivation.

A linear operator $L : B(X) \rightarrow B(X)$ is called the Lie derivation, if $L([T, S]) = [L(T), S] + [T, L(S)]$ for all $T, S \in B(X)$. It is clear that every an associative derivation in $B(X)$ is a Lie derivation.

The following Theorem establishes a connection between associative and Lie derivations on $B(X)$.

Теорема 1. *Let $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ be the Kaplansky-Hilbert $\mathcal{A}$ -module and let $B(X)$ be an algebra of all endomorphisms in X . Then*

- (i). *If X is an essentially infinite-dimensional module, then every Lie derivation $L : B(X) \rightarrow B(X)$ is associative derivation and has the form $L = D_{T_L}$ for some $T_L \in B(X)$;*
- (ii). *If X is not an essentially infinite-dimensional module, then there are Lie differentiations on $B(X)$, which are not associative derivations.*

References

- [1]. Karimov J.A., Kaplansky-Hilbert modules over an algebra of measurable functions, Uzbek Math. J., No 4 (2010), pp. 74–81.
- [2]. Kusraev A.G., Dominated operators, Springer, Netherlands, 2000.

Weak continuity of Skew-Hermitian operators in symmetric normed ideals

Aminov B.R., Chilin V.I.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

e-mail: aminovbehzod@gmail.com, vladimirchil@gmail.com

Let $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ be a non-dimension separable complex Hilbert space, and let $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (respectively, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) be the algebra of all bounded, (respectively, compact, finite-dimensional) operators acting in $\mathcal{H}$. It is well known that if $\mathcal{I}$ is a proper two-sided ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ then $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. An ideal $\mathcal{I}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ is said symmetric normed ideal if $\mathcal{I}$ has Banach norm $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ such that $\|xzy\|_{\mathcal{I}} \leq \|x\|_{\infty}\|y\|_{\infty}\|z\|_{\mathcal{I}}$ for all $x, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $z \in \mathcal{I}$, where $\|\cdot\|_{\infty}$ is an operator norm, in addition, $\|x\|_{\mathcal{I}} = \|x\|_{\infty}$ for every x with rank one.

Put $\mathcal{C}_1 = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{Tr}(|x|) < \infty\}$, where $\text{Tr}(\cdot)$ standard trace on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. For any symmetric normed ideal $\mathcal{I}$ define associated ideal $\mathcal{I}^{\times} = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy \in \mathcal{C}_1 \text{ for all } y \in \mathcal{I}\}$. It is known ([1]), that $\mathcal{I}^{\times}$ is a symmetric normed ideal in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ with respect to the norm $\|x\|_{\mathcal{I}^{\times}} = \sup\{\text{Tr}(|xy|), \|y\|_{\mathcal{I}} \leq 1\}$. For every $y \in \mathcal{I}^{\times}$ we define linear functional $f_y(x) := \text{Tr}(xy)$, $x \in \mathcal{I}$. It is known that $f_y \in \mathcal{I}^*$ for every $y \in \mathcal{I}^{\times}$, where $\mathcal{I}^*$ is a Banach adjoint for Banach space $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ ([1]). Since $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}^{\times}$ then the weak topology $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\times})$ is Hausdorff topology. It is clear that the weak topology $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\times})$ is weaker than the weak topology $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^*)$.

A bounded linear operator T acting on Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$ is called skew-Hermitian if $\text{Re}(f(T(x))) = 0$ for every $f \in X^*$ and $x \in X$ such that $f(x) = \|f\|_{X^*}\|x\|_X$.

If $\mathcal{I}$ is a symmetric normed ideal and $\mathcal{I}^h = \{x \in \mathcal{I} : x = x^*\}$, then $(\mathcal{I}^h, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ is a real Banach space. The following Theorem establishes the $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\times})$ -continuity of the skew-Hermitian operators.

Theorem 1. Let $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ be a symmetric normed ideal, let $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\times \times}$, and let $T: \mathcal{I}^h \rightarrow \mathcal{I}^h$ be a skew-Hermitian operator. Then T is a $\sigma(\mathcal{I}, \mathcal{I}^{\times})$ -continuous operator.

Using Theorem 1 we get the following description of all surjective linear isometries from $\mathcal{I}^h$ onto $\mathcal{I}^h$ in the case $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\times \times}$ (cf. [2, Theorem 5.1]).

Theorem 2. Let $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ be a symmetric normed ideal, let $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\times \times}$ and let $\mathcal{I} \neq \mathcal{C}_2 = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \text{Tr}(|x|^2) < \infty\}$. If $V: \mathcal{I}^h \rightarrow \mathcal{I}^h$ is a surjective linear isometry then there exists unitary or anti-unitary operator u on $\mathcal{H}$ such that V has the following form $V(x) = uxu^*$, $x \in \mathcal{I}^h$ or in the form $V(x) = -uxu^*$, $x \in \mathcal{I}^h$.

References

- [1]. Garling. D.J.H., On ideals of operators in Hilbert space, Proc. London Math. Soc. V. 17, (1967), P. 115–138.
- [2]. Aminov B.R., Chilin V.I., Isometries of perfect norm ideals of compact operators, Studia Math., V. 241(1) (2018), P. 87–99.

Some notes on lifts in symplectic geometry

Arif Salimov, Sevil Kazimova

Baku State University, Department of "Algebra and Geometry AZ1148, Baku, Azerbaijan
e-mail: asalimov@hotmail.com; sevilkazimova@hotmail.com

Let (M, ω) be a symplectic manifold with almost complex structure φ . If the 2-form ω satisfies the purity condition $\omega(\varphi X, Y) = \omega(X, \varphi Y)$, then the triple (M, ω, φ) is called A -manifold. Let now C be a complex algebra and $\tilde{\omega}^*$ be a complex tensor field of type $(0, 2)$ on holomorphic (analytic) complex manifold $X_r(C)$. Then the real model of $\tilde{\omega}^*$ is a pure tensor field ω . The ϕ_φ -operator applied to a pure tensor field ω is defined by [?]

$$\begin{aligned} (\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2) &= (\varphi X)(\omega(Y_1, Y_2)) - X(\omega(\varphi Y_1, Y_2)) + \omega((L_{Y_1} \varphi)X, Y_2) \\ &\quad + \omega(Y_1, (L_{Y_2} \varphi)X), \end{aligned}$$

where $\phi_\varphi \omega$ is a tensor field of type $(0, 3)$, L_X is the Lie derivation with respect to X . Let on M be given the integrable almost complex structure φ . For complex tensor field $\tilde{\omega}^*$ of type $(0, 2)$ on $X_r(C)$ to be C -holomorphic tensor field it is necessary and sufficient that $\phi_\varphi \omega = 0$ (see [?] p.57). Let now M be a manifold with non-integrable almost complex structure φ . In this case, when $\phi_\varphi \omega = 0$, ω is said to be almost holomorphic. If the symplectic 2-form ω of A -manifold (M, ω, J) satisfies the almost holomorphicity condition $\phi_\varphi \omega = 0$, then it is called an almost holomorphic symplectic 2-form. We call A -manifold admitting such a 2-form an almost holomorphic A -manifold.

The complete lift ${}^C\varphi_{TM}$ of φ to tangent bundle is completely determined by ${}^C\varphi_{TM}({}^CX) = {}^C(\varphi(X))_{TM}$. In an analogous way, the complete lift ${}^C\varphi_{T^*M}$ of φ to cotangent bundle is completely determined by ${}^C\varphi_{T^*M}({}^CX) = {}^C(\varphi(X))_{T^*M} + \gamma(L_X \varphi)$. We have

Theorem. Let (M, ω, J) be a symplectic A -manifold and $\omega^\# : T^*M \rightarrow TM$ be a musical isomorphism between cotangent and tangent bundles. If the symplectic A -manifold is an almost holomorphic ($\phi_\varphi \omega = 0$), then the complete lift ${}^C\varphi_{T^*M}$ is a transform of ${}^C\varphi_{TM}$ by $\omega^\#$, i.e. $(\omega^\#)^* {}^C\varphi_{TM} = {}^C\varphi_{T^*M}$.

References

- [1]. Salimov, A., On operators associated with tensor fields, J. Geom., 99(1-2), 2010, 107-145.
- [2]. Salimov, A., Tensor Operators and their applications, Mathematics Research Developments Series, Nova Science Publishers, New York, 2013.

Conditions of the G -equivalence of m -tuples for the group $G = SO(\psi)$ in the two-dimensional bilinear-metric space with the form $\psi(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2$ over the field of rational numbers

Mohigul Ashurova, Gayrat Beshimov

National University of Uzbekistan, 100174 Tashkent, Uzbekistan

The two-dimensional vector space over the field of rational numbers Q denote by Q^2 . For $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in Q^2$, we put $\psi(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2$. A mapping $T : Q^2 \rightarrow Q^2$

will be called ψ -orthogonal if $\psi(T(a), T(b)) = \psi(a, b)$ for all $a, b \in Q^2$. Denote by $O(\psi)$ the group of all ψ -orthogonal transformations of Q^2 . It is proved that every $F \in O(\psi)$ is linear. Denote by $SO(\psi)$ the set $\{A \in O(\psi) : \det(A) = 1\}$. It is a subgroup of $O(\psi)$.

Definition 1. Let N be the set of all natural numbers and $m \in N$. An well ordered set $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, where $u_j \in Q^2, \forall j = 1, 2, \dots, m$, will be called an m -tuple in Q^2 . The set of all m -tuples denote by $(Q^2)^m$.

Definition 2. Two m -tuples $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ and $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ are called $SO(\psi)$ -equivalent if there exists $H \in SO(\psi)$ such that $v_j = Hu_j, \forall j = 1, 2, \dots, m$. This equivalence denoted by $u \stackrel{SO(\psi)}{\sim} v$.

Definition 3. A function $f : Q^2 \rightarrow Q$ is called $SO(\psi)$ -invariant on Q^2 if $f(Ha) = f(a), \forall a \in Q^2, \forall H \in SO(\psi)$.

Let $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in Q^2$. The following functions $\psi(a, b) = a_1b_1 + 2a_2b_2$ and $[ab] = a_1b_2 - a_2b_1$ are $SO(\psi)$ -invariant functions.

Put $\theta = (0, 0) \in Q^2$. Denote by θ_m the m -tuple $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in (Q^2)^m$ such that $u_j = \theta, \forall j = 1, 2, \dots, m$. Define the function $D : (Q^2)^m \rightarrow N$ as follows: put $D(0_m) = 0$. Let $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in (Q^2)^m$ be such that $u \neq \theta_m$. In this case, we put $D(u) = k$, where $k \in N, k \leq m$, such that $u_j = \theta, \forall j = 1, \dots, k-1$ and $u_k \neq \theta$. The function $D(u)$ is also an $SO(\psi)$ -invariant function. In the case $k = m$, $u \stackrel{SO(\psi)}{\sim} v$ if and only if $D(u) = D(v)$ and $\psi(u_k, u_k) = \psi(v_k, v_k)$.

Theorem. Let $u = (u_1, u_2, \dots, u_m), v = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in (Q^2)^m$ be m -tuples in Q^2 such that $D(u) = k$, where $1 \leq k < m$.

(i). Assume that $u \stackrel{SO(\psi)}{\sim} v$. Then the following equalities hold

$$\begin{cases} D(u) = D(v); \\ \psi(u_k, u_j) = \psi(v_k, v_j), \forall j = k, \dots, m; \\ [u_k u_j] = [v_k v_j], \forall j = k+1, \dots, m. \end{cases} \quad (1)$$

(ii). Conversely, assume that equalities Eq.(1) hold. Then there exists the unique matrix $F \in SO(\psi)$ such that $v_j = Fu_j, \forall j = 1, \dots, m$. It has the following form

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\psi(u_k, v_k)}{\psi(u_k, u_k)} & \frac{-2[u_k v_k]}{\psi(u_k, u_k)} \\ \frac{\psi(u_k, u_k)}{\psi(u_k, u_k)} & \frac{\psi(u_k, v_k)}{\psi(u_k, u_k)} \end{pmatrix}.$$

Second order vector-differential operations

Aslonov J.O.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: jasurbek05@mail.ru

It is known that if a certain coordinate system is defined in the three-dimensional Euclidean space, then the dependence of the field on the points of space is expressed by the functions of three arguments. Nevertheless, coordinate systems play a subordinate role when working with fields: they serve as a basis for studying the spatial properties of fields

in the language of functional dependencies using formulas and equations. Therefore, when describing fields, the main focus is on studying the invariant (independent of coordinate systems) properties of fields. Such as level surfaces, integral curves, orbits of families of vector fields, gradient of scalar fields, divergence and rotor of vector fields. The paper presents the basics of the theory of scalar and vector fields, and discusses the methods of their analytical and geometric description, as well as the application of some physical laws.

Proposition 1. Any integral curve (vector line) of a potential vector field $X = \operatorname{grad} u$ is the intersection of two surfaces of second order.

Definition. A scalar field depending only on the distance of the point to the origin, is called spherical.

Proposition 2. The gradient vector field of a spherical scalar field is a potential field.

Corollary. Coulomb field $X = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ ($C = \text{const}$) is a potential field.

Proposition 3. If X is a vector field of a spherical scalar field, then it is solenoidal in any region that does not contain the origin.

Proposition 4. If X is a vector field of a spherical scalar field, then it is irrotational.

Let M be a smooth connected Riemannian manifold of dimension n and a smooth vector field X is given on the manifold M .

Definition. A vector field X on M is called a Killing vector field, if the one-parameter group of local transformations generated by the field X consists of isometries of the manifold [5].

Proposition 5. The Killing vector field in three-dimensional Euclidean space is a solenoidal vector field.

References

- [1]. Kochin N.E. Vector calculus and beginnings of tensor calculus. 9th ed. M., 1965.
- [2]. Butuzov V.F. and others. Mathematical analysis in questions and problems. Izd.5, M.: Fizmatlit, 2001. 480 p.
- [3]. Gavrilov V. G. Multiple and curvilinear integrals. Elements of field theory: studies. for universities. M.: Publishing House of Moscow State Technical University. N. E. Bauman, 2003. - 496 p.
- [4]. Aslonov J. O. Geometry of the orbits of vector fields. Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 2011. №5. p. 5-7.
- [5]. Aslonov J. O. Geometry of the orbits of Killing vector fields. Uzbek Mathematical Journal. Tashkent, 2012, №2. Pp. 77-85.

2-local derivation on generalized Witt algebras

Ayupov Sh.A.^{1,2}, Kudaybergenov K.K.³, Yusupov B.B.²

¹*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,*

²*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,*

³*Department of Mathematics, Karakalpak State University*

e-mail: sh_ayupov@mail.ru, karim2006@mail.ru, baxtiyor_yusupov_93@mail.ru

The notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms on algebras were introduced in 1997 by Šemrl [8]. The main problems concerning the above notions are to find conditions on the underlying algebra under which every 2-local derivation (respectively, 2-local automorphism) on this algebra automatically becomes a derivation (respectively, automorphism), and also to present examples of algebras with 2-local derivations (respectively, 2-local automorphism) that are not derivations (respectively, not automorphism). In the present paper we consider such problem in the framework of Lie algebras. Let $\mathcal{L}$ be a Lie algebra. A *derivation* on a Lie algebra $\mathcal{L}$ is a linear map $D : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz law, that is, $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$ for all $x, y \in \mathcal{L}$. A map $\Delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ (not linear in general) is called a *2-local derivation* if for every $x, y \in \mathcal{L}$, there exists a derivation $D_{x,y} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ (depending on x, y) such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$ and $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$. The notion of 2-local automorphism is defined in a similar way. These problems have been solved in the finite dimensional case by Ayupov, Kudaybergenov and Rakhimov in [2] where they proved that every 2-local derivation on a finite-dimensional semi-simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation, and every finite-dimensional nilpotent Lie algebra with dimension larger than two admits a 2-local derivation which is not a derivation. Further in [1] it was proved that every 2-local automorphism on a finite-dimensional semi-simple Lie algebra $\mathcal{L}$ over an algebraically closed field of characteristic zero is an automorphism. Similar results concerning 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras were obtained in [3]. Recently, in [4] the authors studied 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras over a field of characteristic zero and proved that all 2-local derivations of the Witt algebra as well as of the positive Witt algebra and the classical one-sided Witt algebra are (global) derivations.

In the present paper, we consider the above problem for a larger class of infinite dimensional Lie algebras. Namely, we prove that each 2-local derivation on a simple generalized Witt algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation. The proof of the main result is based on the following properties of the considered Witt algebras.

- these algebras are finitely generated;
- maximal Cartan subalgebras are finite-dimensional.

Our proof is essentially different from the proof in the finite-dimensional semisimple Lie algebra. In the finite dimensional case one of the main ingredient of the proof was so-called non-degenerate Killing form. In the infinite-dimensional case the existence of non-degenerate Killing form on Lie algebras is not true in general. Moreover, in the paper [9] it is proved that any invariant symmetric bilinear form on simple generalized Jacobson-Witt algebras vanishes.

Generalized Witt algebras, over a field $\mathbb{F}$ of characteristic 0, were defined by Kawamoto in [7]. In [5] Doković and Zhao gave another equivalent definition of generalized Witt algebras.

Let us consider the tensor product

$$W = \mathbb{F}\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{F}} T = \text{span}_{\mathbb{F}} \{t^J \otimes \partial : J \in \mathcal{A}, \partial \in T\}.$$

The element of W is also denoted as $t^J \otimes \partial := t^J \partial$. Now, if a given map $(\partial, J) \rightarrow \partial(J) : T \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{F}$ is $\mathbb{F}$ -linear in the first variable and additive in the second variable, then the bracket

$$[t^J \partial_1, t^K \partial_2] := t^{J+K} (\partial_1(K) \partial_2 - \partial_2(J) \partial_1), \quad J, K \in \mathcal{A}, \partial_1, \partial_2 \in T, \quad (2)$$

defines an infinite dimensional Lie algebra on the tensor product W . The Lie algebra W with the Lie multiplication (2) is called a generalized Witt algebra over the vector space T graded by the abelian group $\mathcal{A}$ (see [5]).

If $\mathcal{A}$ is the additive group of $\mathbb{Z}^n$ with $n > 0$, then the group algebra $\mathbb{F}\mathcal{A}$ is isomorphic to the Laurent polynomial algebra $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ over $\mathbb{F}$. For an n -tuple $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ we write $t^J = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n}$. Let T be the linear span $T = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F} \partial_i$ of the operators $\partial_i = t^i \frac{\partial}{\partial t_i}$. If the map $(\partial, J) \rightarrow \partial(J) : T \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{F}$ satisfies $\partial_i(J) = j_i$ then the corresponding generalized Witt algebra $W = W_n(\mathbb{F})$ can be identified with the Lie algebra $\text{Der}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$ of derivations of the Laurent polynomial algebra $\mathbb{F}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ over $\mathbb{F}$, consisting of the Laurent polynomial vector fields

$$w(J; i) = w(j_1, \dots, j_n; i) = t_1^{j_1} \cdots t_n^{j_n} \frac{\partial}{\partial t_i},$$

where $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{F}^n$ are the canonical coordinates in $\mathbb{F}^n$. A Lie algebra which is isomorphic to the Lie algebra $W^n(\mathbb{F})$ of Laurent polynomial vector fields is called Witt algebra over the vector space $\mathbb{F}^n$. The Lie algebra $W_n(\mathbb{F})$ has a basis $\{w(\mathbf{a}, i) : \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n, i \in I\}$ such that the multiplication rule (2) can be rewritten as

$$[w(\mathbf{a}, i), w(\mathbf{b}, j)] = \mathbf{a}_j w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, i) - \mathbf{b}_i w(\mathbf{a} + \mathbf{b}, j), \quad (3)$$

where $i, j \in I$ and $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_i)$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_i) \in \mathbb{Z}^n$ (see [7]). It is known [6, Theorem 2] (see also [5, Proposition 3.3]) that any derivation on the Witt algebra $W_n(\mathbb{F})$ is inner.

The following theorem is the main result of this note.

Theorem 1. Any 2-local derivation Δ on $W_n(\mathbb{F})$ is a derivation.

References

- [1] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., 2-local automorphisms on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and its Applications*, 507 (2016) 121-131.
- [2] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S., 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, *Linear Algebra and its Applications*, 474 (2015), 1-11.
- [3] Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. and Omirov B.A., Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2019). <https://doi.org/10.1007/s40840-019-00799-5>.
- [4] Ayupov Sh.A. and Yusupov B.B., 2-Local derivations of infinite-dimensional Lie algebras, *Journal of Algebra and Its Applications*, doi.org/10.1142/S0219498820501005.

- [5] Doković D. and Zhao K., Derivations, isomorphisms and second cohomology of generalized Witt algebras, Trans. AMS., 350 (1998) 643–664.
- [6] Ikeda T. and Kawamoto N., On the derivations of generalized Witt algebras over a field of characteristic zero, Hiroshima Math. J. 20 (1990) 47–55.
- [7] Kawamoto N., Generalizations of Witt algebras over a field of characteristic zero, Hiroshima Math. J. 16 (1986) 417–426 .
- [8] Šemrl P., Local automorphisms and derivations on $B(H)$, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997) 2677–2680.
- [9] Zusmanovich P., Nonexistence of invariant symmetric forms on generalized Jacobson–Witt algebras revisited, Communications in Algebra, 39 (2011) 548–554.

Topological properties of unbounded limit sets of dynamical systems

Azamov A.A., Ruzimuradova D.H.

Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskii

National University of Uzbekistan

e-mail: abdulla.azamov@gmail.com, d.ruzimuradova@mail.ru

Consider a dynamical system

$$\dot{a} = f(z), z \in \mathbb{R}^d, d \geq 2. \quad (4)$$

It is known that, ω -limit set Ω of a fixed trajectory of (1), passing through some initial point is always closed invariant set and if it is bounded, than it is non-empty connected compact set [1]. The structure of Ω was investigated first [2] and in details in [3] for the case of $d = 2$.

We study topological properties of unbounded ω -limit sets. It is proved that if the ω -limit set Ω is not connected, then each its component is unbounded, that clarifies the well-known property confirming that if the ω -limit set is not connected then it is unbounded. It is also established that the family of connectivity components of the ω -limit set of a planar analytic system can be finite or countable while non-analytic systems may admit the ω -limit set with continuum family of components. Examples of an analytic system possessing ω -limit set with infinite number of components and a polynomial system where the ω -limit set has exactly N connectivity components are constructed. Although many results on the subject have been founded, many problems stay open.

1. May an analytic system have more than a countable number of connectivity components in the space $\mathbb{R}^d, d \geq 3$?

2. It is known that an ω set of a trajectorie of quadratic systems is always connected and that of cubic systems may have at most 2 a connectivity components. What is the minimum degree of a polynomial system with the ω set consisting of three connectivity components? How many connectivity components may quatric systems have?

3. Does there exist a function $L(n)$ such that the ω -limit set of trajectory for any polynomial system of a degree n has at most $L(n)$ connectivity components?

References

- [1]. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations, Princeton University Press, Princeton (1960).
- [2]. Vinograd R. On the limit behavior of an unbounded integral curve. Moskov. Gos. Univ. Uch. Zap. 155, Mat. 5, 94–136 (1952).
- [3]. Lopez V.J., Llibre J.S. A topological characterization of the ω -limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane. Adv. Math, Vol. 216, No 2, 677–710 (2007).
- [4]. Azamov A.A., Ruzimuradova D.H. On Unbounded Limit Sets of Dynamical Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences ? Proceedings Springer, 2019 (ISSN 2522-5383) (imprint)

Symmetric spaces of measurable functions, associated with symmetric sequence spaces

Azizov A.N.

*National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan
e-mail: azizov.07@mail.ru*

Let $((0, \infty), \nu)$ be the measure space with a σ -finite Lebesgue measure ν , and let $\mathcal{L}_\nu$ be the algebra of equivalence classes of almost everywhere finite real valued measurable functions f on $((0, \infty), \nu)$, such that $\nu\{|f| > \lambda(f)\} < \infty$ for some $\lambda(f) > 0$. If $f \in \mathcal{L}_\nu$, then a non-increasing rearrangement of f is defined as $f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : \nu\{|f| > \lambda\} \leq t\}$, $t > 0$, [1, Ch. II, §2]. A non-zero linear subspace $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}_\nu$ with a Banach norm $\|\cdot\|_\mathcal{E}$ is called a symmetric space on $(0, \infty)$ if conditions $f \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{L}_\nu$ and $g^*(t) \leq f^*(t) \forall t > 0$, imply that $g \in \mathcal{E}$ and $\|g\|_\mathcal{E} \leq \|f\|_\mathcal{E}$ [1, Ch. II, §4].

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers, let $2^\mathbb{N}$ be the σ -algebra of all subsets of $\mathbb{N}$, and let μ be a σ -finite measure on $2^\mathbb{N}$ such that $\mu(\{n\}) = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. It is clear that $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{N}, \mu) = l_\infty$ and $\mathcal{L}_1(\mathbb{N}, \mu) = l_1$. For any $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ we set $\xi_n^* = \inf_{\text{card}(F) < n} \sup_{n \notin F} |\xi_n|$, where F is a finite subset in $\mathbb{N}$. A non-zero linear subspace $X \subset l_\infty$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called symmetric sequence space if conditions $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in X$, $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ and $\eta_n^* \leq \xi_n^*$ for all $n \in \mathbb{N}$ imply that $\{\eta_n\} \in X$ and $\|\{\eta_n\}\|_X \leq \|\{\xi_n\}\|_X$ [2, Vol. II, Ch. 2].

Let $E(0, \infty)$ be a symmetric space on $(0, \infty)$, and let $E(\mathbb{N}) = \{x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty : x^*(t) = \sum_{n=1}^\infty \xi_n^* \cdot \chi_{[n-1, n)}(t) \in E(0, \infty), t > 0\}$, $\|x\|_{E(\mathbb{N})} = \|x^*(t)\|_{E(0, \infty)}$; $x \in E(\mathbb{N})$, where χ_A is a characteristic function of a set A . It is clear that $(E(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ is a symmetric sequence space. Naturally, we have the following question:

(Q). Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be an arbitrary symmetric sequence space. Is there a symmetric space $E(0, \infty)$ on $(0, \infty)$ such that the equalities $X = E(\mathbb{N})$ and $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})}$ are true?

The following Theorem gives a positive answer to the question (Q).

Theorem 1. *If $(X, \|\cdot\|_X)$ is a symmetric sequence space, then there exists a symmetric space $E(0, \infty)$ on $(0, \infty)$ such that $X = E(\mathbb{N})$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})}$.*

References

- [1]. S. G. Krein, Ju. I. Petunin and E. M. Semenov, **Interpolation of Linear Operators**, *Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc.* **54**, 1982.
- [2]. J. Lindenstrauss J., Tsafriri L., **Classical Banach spaces**, Vol. I-II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 1996.

Geometry multiverse

Taras Banakh

Institute of Mathematics

Jan Kochanowski University in Kielce, Kielce, Poland

e-mail: t.o.banakh@gmail.com

We shall discuss the interplay between various structures on metric spaces (topology, uniformity, coarse structure, bornology), and the respective compactifications (Stone-Cech, Samuel, Higson). Using coarse structures, induced by group actions, we shall characterize compact Hausdorff spaces which are homeomorphic to the Higson compactification or the Higson corona of a finitary coarse space.

On n -power-associative two-dimensional algebras

Bekbaev U.

Department of Natural and Mathematical Sciences, TTPU, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: uralbekbaev@gmail.com

One of the classes of algebras with quite weak associativity condition is the class of power-associative algebras. An algebra $\mathbf{A}$ is said to be a power-associative algebra if its every subalgebra generated by a single element is an associative algebra. One can weaken this condition by fixing some positive integer $n \geq 3$ and consider n -power-associative algebras, that is algebras where " u^n " is well defined for any element u . It means that n times product of any element does not depend on the order of the multiplication, for example, 3-power-associativity of an algebra $\mathbf{A}$ means that $u^2u = uu^2$ is true for any $u \in \mathbf{A}$. The description of two-dimensional power-associative algebras over the field of complex and real numbers has been given in [1]. When every quadratic and cubic polynomial over the underlying field $\mathbf{F}$ has a root in it or $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ -the field of real numbers the corresponding result can be found in [2], where a description of 3-power-associative algebras is given as well. These results have been obtained relying on [3,4,5,6,7,8].

Our main result says the following. Let $\mathbf{F}$ be any field such that every quadratic and cubic polynomial over it has a root in it or $\mathbf{F} = \mathbf{R}$.

Theorem In two-dimensional case every n -power-associative algebra over $\mathbf{F}$, where $n \geq 4$, is power-associative.

In connection with this Theorem it is natural to ask the following two interesting questions about finite dimensional algebras over an algebraically closed field $\mathbf{F}$.

Question 1. Is it true that at any natural $m \geq 3$ there exists a positive integer $p(m)$ such that if $n > p(m)$ then every n -power-associative m -dimensional algebra is power associative?

Let $A(m)$ stand for the set of all m -dimensional algebras, $PA(m)$ -be the set of all m -dimensional power associative algebras and $PA_{[l,\infty)}(m)$ be the set of all m -dimensional algebras which are n -power-associative at any $n \geq l$.

Question 2. Does the tower $PA_{[1,\infty)}(m) \subset PA_{[2,\infty)}(m) \subset PA_{[3,\infty)}(m) \subset PA_{[4,\infty)}(m) \subset \dots$ stabilize? If "Yes" will $PA(m)$ be its stabilized term?

The questions are formulated for $m \geq 3$ case as far as at $m = 2$ the answers to these questions are positive due to the Theorem.

References

- [1] Wallace E.W., "Two-dimensional power-associative algebras Mathematics Magazine, "vol.43(3), 158–162(1970).
- [2] Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I., On two-dimensional power-associative algebras over algebraically closed fields and $\mathbf{R}$, Lobachevskii Journal of Mathematics, vol.40(1), 1–13(2019).
- [3] Ahmed H., Bekbaev U., Rakhimov I., "Complete classification of two-dimensional algebras *AIP Conference Proceedings* 1830, 070016, doi: 10.1063/1.4980965(2017).
- [4] Albert A.A., "On power-associativity of rings *Summa Brasiliensis Math.*, vol.2, 21–33(1948).
- [5] Albert A.A., "Power-associative rings *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol.64(1), 552–593(1948).
- [6] Bekbaev U., "Complete classification of two-dimensional general, commutative, commutative Jordan, division and evolution algebras arXiv: 1705.01237(1917).
- [7] Galinov A.T., identity relations for binary Lie rings *Usp. Matem. Nauk*, vol.12,3 (75), 141–146(1957) (in Russian).
- [8] Galinov A.T., "Power-associative algebras over a finite-characteristic field *Algebra i Logika*, vol.8(5), 505–522(1969) (in Russian).

A complete system of invariants of m -tuples for the group $SO(2, P)$ in the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 - 2x_2y_2$ over the field of rational numbers

Gayrat Beshimov, Erkin Rahmonov

National University of Uzbekistan, 100174 Tashkent, Uzbekistan

Let P be the field of rational numbers and P^2 be the 2-dimensional vector space over P and $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in P^2$. Consider the following bilinear form on P^2 : $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$. Denote by $O(\varphi)$ the group of all mappings $F : P^2 \rightarrow P^2$ such that $\varphi(F(x), F(y)) = \varphi(x, y)$ for all $x, y \in P^2$. It is easy to see that every $F \in O(\varphi)$ is linear. Put $SO(\varphi) = \{C \in O(\varphi) : \det(C) = 1\}$. $SO(\varphi)$ is a subgroup of $O(\varphi)$.

Let N be the set of all natural numbers and $m \in N, m \geq 1$. Put $N_m = \{j \in N | 1 \leq j \leq m\}$.

Definition 1. A mapping $u : N_m \rightarrow P^2$ will be called an m -tuple in P^2 . Denote it in the following form $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$.

Definition 2. Two m -tuples $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ and $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ in P^2 is called $SO(\varphi)$ -equivalent if there exists $g \in SO(\varphi)$ such that $v_j = gu_j, \forall j \in N_m$. In this case, we write $u \stackrel{SO(\varphi)}{\sim} v$.

Definition 3. A function $f : P^2 \rightarrow P$ is called $SO(\varphi)$ -invariant on P^2 if $f(gx) = f(x), \forall x \in P^2, \forall g \in SO(\varphi)$.

Let $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in P^2$. The following functions $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$ and $[xy] = x_1y_2 - x_2y_1$ are $SO(\varphi)$ -invariant functions. It is easy to see that $x \stackrel{SO(\varphi)}{\sim} y$ if and only if $\varphi(x, x) = \varphi(y, y)$.

Theorem. Let $m > 1$ and $u = (u_1, u_2, \dots, u_m), v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ be m -tuples in P^2 such that $u_1 \neq 0, v_1 \neq 0$.

(i). Assume that $u \stackrel{SO(2,R)}{\sim} v$. Then the following equalities hold

$$\begin{cases} \varphi(u_1, u_j) = \varphi(v_1, v_j), \forall j = 1, \dots, m; \\ [u_1, u_j] = [v_1, v_j], \forall j = 2, \dots, m. \end{cases} \quad (5)$$

(ii). Conversely, assume that equalities Eq.(1) hold. Then there exists the unique matrix $F \in SO(2, R)$ such that $v_j = Fu_j, \forall j = 1, \dots, m$. This unique matrix F has the following form

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\varphi(u_1, v_1)}{\varphi(u_1, u_1)} & \frac{2[u_1 v_1]}{\varphi(u_1, u_1)} \\ \frac{[u_1 v_1]}{\varphi(u_1, u_1)} & \frac{\varphi(u_1, v_1)}{\varphi(u_1, u_1)} \end{pmatrix}.$$

Uniform space and its hyperspace

Beshimov R.B., Safarova D.T.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: rbeshimov@mail.ru, safarova.dilnora87@mail.ru

In [1] V.V.Fedorchuk showed that the functor P_τ of τ - additive probability measures does not preserve completeness of uniform spaces. In [2] Chi-Keung Ng showed that a uniform structures U comes from a pseudo uniform metric that takes values in a totally ordered set if and if U admits a totally ordered base. In this paper, we study some topological properties of uniformly space and its hyperspace.

Let X be a nonempty set, and α and β the coverings of the set X . It is said that α is inscribed in the cover of β , if for any $A \in \alpha$ there exists $B \in \beta$, such that $A \subset B$, and write $\alpha > \beta$. Let α be the cover of the set X and $Y \subset X$. The set $\alpha(Y) = \cup \{A \in \alpha : A \cap Y \neq \emptyset\}$ is called the star set with respect to the covering α . If $Y = \{x\}$, then write $\alpha(x)$ instead of $\alpha(\{x\})$. Next, put $\alpha^\Delta = \{\alpha(x) : x \in X\}$, $\alpha^* = \{\alpha(A) : A \in \alpha\}$. They say that a cover α is star inscribed in β if $\alpha^\Delta > \beta$. If $\alpha^* > \beta$, then they say that α is strongly star inscribed in β .

Definition 1. [3]. Let X be a nonempty set. A family U of coverings of a set X is called uniformity on X if the following conditions are satisfied:

(P1) If $\alpha \in U$ and α is inscribed in some cover β of the set X , then $\beta \in U$.

(P2) For any $\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in U$ there exists $\alpha \in U$, which is inscribed in α_1 and α_2 .

(P3) For any $\alpha \in U$, there exists $\beta \in U$ strongly star inscribed in α .

(P4) For any x, y of a pair of different points of X , there exists $\alpha \in U$ such that no element of α contains both x and y .

A pair (X, U) consisting of a set X , satisfying conditions (P1) - (P4) is called uniformity on X , and a pair (X, U) is called a uniform space.

Let (X, U) be a uniform space and $\exp X$ the set of all nonempty closed subsets of the space (X, τ_U) . For each $\alpha \in U$, put $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\}$, where $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \exp X : F \subseteq \cup \alpha'\}$ and $F \cap A \neq \emptyset$ for each $A \in \alpha'$.

Remark 1. [3]. Let $\exp_c X$ be the set of all nonempty compact subsets of the uniform space (X, U) . For each $\alpha \in U$, put $K(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha \text{ and } \alpha' - \text{finite}\}$. Note that $K(\alpha)$ is the cover of the set $\exp_c X$.

Theorem 1. A uniform space (X, U) is precompact if and only if the uniform space $(\exp_c X, \exp_c U)$ is precompact.

Theorem 2. Let a uniform space (X, U) be uniformly locally compact. Then the uniform space $(\exp_c X, \exp_c U)$ is uniformly locally compact.

References

- [1]. V.V.Fedorchuk. On a preservation of completeness of uniform spaces by the functor P_τ // Topology and its Application. 1999. No 91, 25-45 p.
- [2]. Chi-Keung Ng. Coarse metric and uniform metric // Topology and its Application. 2019. No 260, 1-12 p.
- [3]. A.A. Borubaev. Uniform topology. Bishkek. Science. 2013, 338 p.
- [4]. R.Engelking. General Topology. Revised and completed edition. Berlin. Helderman. 1986, 752 p.
- [5]. Michail. E. Topologies on spaces of subsets // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. No 1 71, 152-172 p.

Separation axioms of space of the permutation degree

Beshimov R.B., Zhuraev R.M.

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: rmjurayev@mail.ru*

Let X^n be the n th power of a compact X . The permutation group S_n of all permutations, acts on the n th power X^n as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by $SP^n X$. Consider as a factor mapping

$$\pi_n^s : X^n \rightarrow SP^n X$$

put the point $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ to the point orbit of this point. Thus, points of the space $SP^n X$ are finite subsets (equivalence classes) of the product X^n . Thus two points $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$, are considered to be equivalent if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_{\sigma(i)}$ for all $i = 1, 2, \dots, n$. The space $SP^n X$ is called the n -permutation degree of a space X .

Definition 1. Let $\mathfrak{S}$ be a family of subsets of a space X . Then $\mathfrak{S}$ is called k -network [8], if for every compact subset K of X and an arbitrary open set U , containing K in X there is a finite subfamily $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ such that $K \subset \bigcup \mathfrak{S}' \subset U$. Recall that a space X is an $\aleph$ -space if X has a σ -locally finite k -network.

Definition 2. A set X is called $\Pi\aleph$ -space if for every $n \in N$ product X^n is an $\aleph$ -space.

Theorem 1. Let topological space X be a $\Pi\aleph$ -space. Then the space $SP^n X$ is $\aleph$ -space.

Theorem 2. A topological space X is T_i , if and only if the space $SP^n X$ is T_i при $i = 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$.

References

- [1]. V.V. Fedorchuk, V.V. Filippov, Topology of hyperspaces and its application // Moscow: Mathematica, cybernetica. 4 (1989).48p.
- [2]. Fucai Lin, Chuan Liu, The k -spaces property of the free Abelian topological groups over non-metrizable Lašnev spaces // Topology and its Applications 220 (2017) 31–42.

The compactification with respect to the strongly delta normal base

Chekeev A.A., Kasymova T.J., Abdiev A.A.

Balasagyn Kyrgyz National University

e-mail: asyl.ch.top@mail.ru

The next spaces under name totally normal spaces were introduced by A.D. Alexandroff [2].

Definition 1.[2,5]. A cozero-field on the set X is a family $\mathcal{A}$ of subset of X satisfying (1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$; (2) $\mathcal{A}$ is closed under finite intersection and countable union; (3)If $A, B \in \mathcal{A}$ with $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \emptyset$, then there are disjoint $C, D \in \mathcal{A}$ with $X \setminus A \subset C$ and $X \setminus B \subset D$; (4)If $A \in \mathcal{A}$, then there are $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ with $X \setminus A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

An *Alexandroff space*, or $\mathcal{A}$ -space is a pair $(X, \mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is a cozero-field on X . The sets on $\mathcal{A}$ are *cozero-sets* of $(X, \mathcal{A})$ and the complements $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ are called *zero-sets*.

An $\mathcal{A}$ -map, or *coz-map* $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ between $\mathcal{A}$ -spaces is a mapping with $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ (or $f^{-1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{B}}) \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$).

Denote by $\mathcal{A}$ a category, whose objects are $\mathcal{A}$ -spaces and morphisms are $\mathcal{A}$ -maps. Objects $(X, \mathcal{A})$ and $(Y, \mathcal{B})$ of a category $\mathcal{A}$ are called $\mathcal{A}$ -homeomorphic (or *coz-homeomorphic*), if there exists bijective $\mathcal{A}$ -mapping $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ such that inverse mapping $f^{-1} : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ is $\mathcal{A}$ -mapping. A morphish set will generally be abbreviated $\mathcal{A}(X, Y)$, and for $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ we write just $\mathcal{A}(X)$, where $\mathbb{R}$ is the real line with the ordinary topology and the unique cozero-field on $\mathbb{R}$ consists of all open sets of $\mathbb{R}$. Elements of $\mathcal{A}(X)$ are $\mathcal{A}$ -functions, $\mathcal{A}^*(X)$ will denote a set of all bounded $\mathcal{A}$ -functions.

In general, given $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, the *cozero-set* is $\text{cozf} = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ and the *zero-set* is $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = X \setminus \text{cozf}$. For $V \subset \mathbb{R}^X$, $\text{coz}V = \{\text{cozf} : f \in V\}$ and $Z(V) = \{Z(f) : f \in V\}$. We note some properties of $\mathcal{A}(X)$ proved in [2] and there are in [5].

Proposition 1.[1,5] If $(X, \mathcal{A})$ is an $\mathcal{A}$ -space, $\mathcal{A}(X)$ is a uniformly closed inversion-closed vector lattice and ring, and $\mathcal{A}^*(X)$ is a uniformly closed cbq vector lattice and ring.

$\mathcal{A}(X)$ ($\mathcal{A}^*(X)$) is a uniformly closed iff a sequence $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(X)$ ($\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^*(X)$) is uniformly converging to the function f , then $f \in \mathcal{A}(X)$ ($f \in \mathcal{A}^*(X)$). $\mathcal{A}(X)$ is inversion-closed iff $f \in \mathcal{A}(X)$ and $Z(f) = \emptyset$, then $1/f \in \mathcal{A}(X)$. $\mathcal{A}^*(X)$ is closed under bounded quotients (cbq), if $f, g \in \mathcal{A}^*(X)$, $Z(g) = \emptyset$, f/g bounded imply $f/g \in \mathcal{A}^*(X)$.

Proposition 2.[2]. If $\mathcal{A}$ satisfies to Definition 1. items (1),(2),(3) then whenever $A, B \in \mathcal{A}$ have $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = \emptyset$, then there is $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ with $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$ for each open O in $\mathbb{R}$ and $f(X \setminus A) = \{0\}$, $f(X \setminus B) = \{1\}$.

Corollary[2]. If $(X, \mathcal{A})$ is an $\mathcal{A}$ -space, then $\mathcal{A} = \text{coz}\mathcal{A}(X)$.

Definition 2.[2]. An $\mathcal{A}$ -space $(X, \mathcal{A})$ is called T_1 -space, if for any two distinct point x, y of X if there exists $Z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ such that $x \in Z$ and $y \notin Z$. The $\mathcal{A}$ -space $(X, \mathcal{A})$ is *totally regular*, if it is, firstly, a T_1 -space, and secondly, for every $F \in \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ and a point $x \notin F$ there exists a $\mathcal{A}$ -function $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow I = [0, 1]$ such that $f(F) = \{0\}$ and $f(x) = \{1\}$.

Totally regular $\mathcal{A}$ -spaces and their $\mathcal{A}$ -mappings form a subcategory of the category $\mathcal{A}$ denoted by $\mathcal{ATych}$. For any Tychonoff space X the set $\text{coz}C(X)$ ($\text{coz}C^*(X)$) forms a cozero-field, where $C(X)$ ($C^*(X)$) is the set of all (bounded) continuous functions on X [4]. Hence, a pair $(X, \text{coz}C(X))$ forms totally regular $\mathcal{A}$ -space. Every continuous mapping $f : X \rightarrow Y$ is $\mathcal{A}$ -mapping $f : (X, \text{coz}C(X)) \rightarrow (Y, \text{coz}C(Y))$. Therefore a category $Tych$ of Tychonoff spaces is a complete subcategory of $\mathcal{ATych}$.

A strongly delta normal base was introduced by Alo-Shapiro [3] and this concept is closely connected with totally regular spaces.

Proposition 3. Let $(X, \mathcal{A})$ be an $\mathcal{A}$ -space. Then it is an $\mathcal{A}$ -space iff $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$ is a strongly delta normal base.

For an $\mathcal{A}$ -space $(X, \mathcal{A})$ the Wallman-Shanin compactification [1] $\omega(X, \mathcal{Z})$ is a compact $\mathcal{A}$ -space [2]. From [7] it follows the traces on X of all zero-sets of the compactum $\omega(X, \mathcal{Z})$ is a β -like compactification [6]. Assume $\beta X = \omega(X, \mathcal{Z})$. It has the properties: βX is a compact $\mathcal{A}$ -space; X is a dense $\mathcal{A}$ -subspace; each $\mathcal{A}$ -map of X to a compact $\mathcal{A}$ -space has a unique $\mathcal{A}$ -extension over βX .

We note that all finite coverings of $\mathcal{A}$ form a base of the precompact uniformity u_p on X and βX is the completion of X with respect to the uniformity u_p .

The Wallman-Shanin realcompactification $v(X, \mathcal{Z})$ [3, 1] is a realcompact $\mathcal{A}$ -space [8]. Assume $vX = v(X, \mathcal{Z})$. It has the properties: vX is a realcompact $\mathcal{A}$ -space; X is a dense $\mathcal{A}$ -subspace; each $\mathcal{A}$ -map of X to a realcompact $\mathcal{A}$ -space has a unique $\mathcal{A}$ -extension over vX . Hence $v : X \rightarrow vX$ is an epi-reflection in the category $\mathcal{A}$.

We note that all countable coverings of $\mathcal{A}$ form a base of some uniformity u_ω on X and vX is the completion of X with respect to the uniformity u_ω . And also all $\mathcal{A}$ -function of $\mathcal{A}(X)$ generate the uniformity u_c on X and vX is the completion of X with respect to the uniformity u_c .

In this talk the complete characterizations of Wallman-Shanin β -like compactification and Wallman-Shanin realcompactification will be presented, these are an extension on the category $\mathcal{ATych}$ of the characterizations of the Stone-Ćech compactification and the Hewitt-Nachbin-Shirota realcompactification in the category $Tych$.

References

- [1]. Aarts J. M., Nishiura T., Dimension and Extensions, North-Holland, 1993. 331 p.
- [2]. Alexandroff A. D. Additive set functions in abstract spaces, Mat.Sbornik 50(1940), 30-348; 51(1941), 563-628; 55(1943), 169-238.(in Russian).
- [3]. Alo A. R., Shapiro H. L., Normal Topological Spaces, Cambridge University Press, 1974. 306 p.
- [4]. Gillman L., Jerison M., Rings of continuous functions, The Univ. Series in Higher Math., Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960, 303 p.

- [5]. Hager A. W., Real-valued functions on Alexandroff (zero-set) spaces, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, Vol. 16 (1975), No. 4, 755–769
- [6]. Mrówka S., β -like compactifications, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, 24(3-4), (1973), 279–287.
- [7]. Steiner A. K., Steiner E. F., Nest generated intersection rings in Tychonoff spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 148,(1970), 589–601.
- [8]. Weir M. Hewitt–Nachbin Spaces, North-Holland, NY, (1975). 270 p.

Uniformities on the free topological groups

Chekeev A.A., Kasymova A.B.

Balasagyn Kyrgyz National University

e-mail: asyl.ch.top@mail.ru

In this talk the investigations of various properties of the natural uniform structures (left, right, two-sided) on the topological and free topological groups will be presented. In particular, let $F(X)$ be a free algebraic group of the set X of a uniform space uX . Then $F(X)$ equipped by the strongest group topology such that its left uniformity u_l (hence, the right uniformity u_r too) induces the uniformity u on X is the free topological group of the uniform space uX in sense of Nakayama [2]. And the free algebraic group $F(X)$ equipped by the strongest group topology such that its two-sided uniformity u'_t induces the uniformity u on X is the free topological group of the uniform space uX in sense of Nummela [3]. For the free Abelian algebraic group $A(X)$ concepts of the free topological group of a uniform space in sense Nakayama and Nummela coincide. We will denote the free Abelian topological group of the uniform space uX by $A(uX)$. Let Y be a subspace of Tychonoff space X and v, u be uniformities on Y and X respectively. Then the uniform space vY is called *uniformly $P(P^*)$ -embedded* into uX , if every (bounded) uniformly continuous pseudometric on vY can be extended to (bounded) uniformly continuous pseudometric on uX .

Theorem 1. The uniform space vY is uniformly P^* -embedded into the uniform space uX if and only if the free Abelian topological group $A(vY)$ is topologically isomorphic embedded into the free Abelian topological group $A(uX)$.

Evidently that Tychonoff space Y is $P(P^*)$ -embedded into Tychonoff space X if and only if $u_Y = u_X|_Y$, where u_X, u_Y are universal uniformities on X and Y , respectively. Then it takes place

Corollary 1.(Tkačenko [1]). Tychonoff space Y is P^* -embedded into Tychonoff space X if and only if the free Abelian topological group $A(Y)$ is topologically isomorphic embedded into the free Abelian topological group $A(X)$.

Theorem 2. Let Y is dense in X . The uniform space vY is uniformly P -embedded into the uniform space uX if and only if the free Abelian topological group $A(vY)$ is topologically isomorphic embedded into the free Abelian topological group $A(uX)$.

Corollary 2. Let Y is dense in X . Tychonoff space Y is P -embedded into Tychonoff space X if and only if the free Abelian topological group $A(Y)$ is topologically isomorphic embedded into the free Abelian topological group $A(X)$.

And also the investigations of natural uniformities (left, right, two-sided) on the free topological groups will be presented.

References

- [1]. A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkačenko, Topological groups, **Atlantis Press**, 2008.
- [2]. T. Nakayama, Note on Free Topological Groups, *Proc. Imp. Acad.*, **Vol. 19**, N. 8, (1943), 471–475.
- [3]. E.C. Nummela, Uniform free topological groups and Samuel compactification, *Topology Appl.*, **Vol. 13** (1982), 77–83.

Description of positive isometries on Lorentz spaces

Chilin V.I., Ergasheva D.A.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

e-mail: vladimirchil@gmail.com, DildoraSoliyeva@mail.ru

Let (Ω, μ) be a measure space with σ -finite measure μ , and let $L_0(\Omega)$ be the algebra of equivalence classes of real valued measurable functions on (Ω, μ) . It is well known the following description of a positive isometries acting in the classical L_p spaces $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ (see, for example [1, Ch.3, § 3.2, Theorem 3.2.5]).

Theorem 1. If $U : L_p(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$, $p \neq 2$, is a positive linear isometry, then there exists nonsingular isomorphism $\tau : \Omega \rightarrow \Omega$, such that $\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(\tau(A)) > 0$, and $(Uf)(\omega) = h(\omega)f(\tau(\omega))$, $f \in L_p(\Omega)$, $\omega \in \Omega$, where $h = \left(\frac{d\mu \circ \tau^{-1}}{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}}$ and $\frac{d\mu \circ \tau^{-1}}{d\mu}$ is the Radon-Nikodym derivation of the measure $\mu \circ \tau^{-1}$ with respect to the measure μ .

In this note we give a description of all positive isometries acting on Lorentz spaces.

Linear map $J : L_0(\Omega) \rightarrow L_0(\Omega)$ is called a homomorphism if $J(f \cdot g) = J(f) \cdot J(g)$ for all $f, g \in L_0(\Omega)$. Each homomorphism is obviously a positive linear map, that is, $J(f) \geq 0$ for all $0 \leq f \in L_0(\Omega)$. A homomorphism $J : \mathcal{L}_0(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_0(\Omega)$ is called a normal if $J(f_n) \uparrow J(f)$ for any $0 \leq f_n \uparrow f$, $f_n, f \in \mathcal{L}_0(\Omega)$.

If $f \in L_0(\Omega)$ then non-increasing permutation $f^* : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ of function f is defined by the following equality $f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{|f| > \lambda\}) \leq t\}$, $t > 0$.

Let ψ be a concave function on $[0, \infty)$ such that $\psi(0) = 0$, $\psi(t) > 0$ for all $t > 0$ and $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$. Denoted by $\Lambda_\psi(\Omega) = \{f \in L_0(\Omega) : \|f\|_\psi = \int_0^\infty f^*(t) d\psi(t) < \infty\}$ the Lorentz space of measurable functions on (Ω, μ) [2, Ch. 2, § 2.5].

The following theorem establishes "disjointness" property for positive linear isometries in Lorentz space.

Theorem 2. If $U : \Lambda_\psi(\Omega) \rightarrow \Lambda_\psi(\Omega)$ is a positive linear isometry, $f, g \in \Lambda_\psi(\Omega)$, and $f \cdot g = 0$ then $U(f) \cdot U(g) = 0$.

Using Theorem 2 we get the following description of all positive linear isometries acting in Lorentz space.

Theorem 3. Let $U : \Lambda_\psi(\Omega) \rightarrow \Lambda_\psi(\Omega)$ be a positive linear isometry. Then there exist a measurable function $0 \leq h \in L_0(\Omega)$ and normal homomorphism $J : L_0(\Omega) \rightarrow L_0(\Omega)$ such that $U(f) = h \cdot J(f)$ for all $f \in \Lambda_\psi(\Omega)$.

Remark. If a measure μ is finite, i.e. $\mu(\Omega) < \infty$, then $\mathbf{1} \in \Lambda_\psi(\Omega)$, where $\mathbf{1}$ is a function equal to unity μ -almost everywhere. In this case, the function $h \in \mathcal{L}_0(\Omega)$ from Theorem 2 coincides with the function $U(\mathbf{1})$, i.e. $U(f) = U(\mathbf{1}) \cdot J(f)$ for all $f \in \Lambda_\psi(\Omega)$.

References

- [1]. Fleming R., Jamison J.E., Isometries on Banach spaces: function spaces. CRC Press Company, Boca Raton London New York Washington, D.C., 2003.
- [2]. S.G. Krein, Ju.I. Petunin, and E.M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Translations of Mathematical Monographs, Amer. Math. Soc., Vol. 54 (1972).

Bloom-Hanson ergodic theorem in $C_\infty(Q)$ -Hilbert-Kaplansky modules

Chilin V.I., Karimov J.A.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: vladimirchil@gmail.com, karimovja@mail.ru

Let Q be a Stone compact corresponding to complete Boolean algebra and let $C_\infty(Q)$ be a commutative algebra with the unity $\mathbf{1}$ of all continuous functions $f : Q \rightarrow [-\infty, +\infty]$, taking the values $\pm\infty$ only on nowhere dense sets in Q . Let $C_\infty(Q, \mathbb{C}) = C_\infty(Q) \oplus i \cdot C_\infty(Q)$ be the complexification of the algebra $C_\infty(Q)$, where $i^2 = -1$. Denote by $\mathcal{A}$ the algebra $C_\infty(Q)$ or $C_\infty(Q, \mathbb{C})$.

Let X be an $\mathcal{A}$ -module with algebraic operations $x + y$ and αx , $x, y \in X$, $\alpha \in \mathcal{A}$. The map $\langle \cdot | \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathcal{A}$ is called an $\mathcal{A}$ -valued inner product, if for all $x, y, z \in X$ and $\alpha \in \mathcal{A}$ the following equalities hold: (i). $\langle x | x \rangle \geq 0$ and $\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (ii). $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$; (iii). $\langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$; (iv). $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$.

Setting $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$, $x \in X$, and using the variant of Cauchy-Bunyakovsky inequality $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, we get that $\|x\|$ is an $\mathcal{A}$ -norm on an $\mathcal{A}$ -module X . If $(X, \|\cdot\|)$ is a Banach $\mathcal{A}$ -module, then $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ is called a Kaplansky-Hilbert $\mathcal{A}$ -module.

We say that a sequence $\{x_n\} \subset (X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ weakly (strongly) converges to $x_0 \in X$ if $\langle x_n | y \rangle \rightarrow \langle x_0 | y \rangle$ for any $y \in X$ (respectively, $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$).

A linear operator $T : X \rightarrow X$ is called $\mathcal{A}$ -bounded if there exists $0 \leq f \in \mathcal{A}$, such that $\|Tx\| \leq f\|x\|$ for all $x \in X$. Let $B(X)$ be an $\mathcal{A}$ -module of all linear $\mathcal{A}$ -bounded operators from X into X . It is known that $\|T\|_{B(X)} = \sup \{\|Tx\| : \|x\| \leq \mathbf{1}\}$, $T \in B(X)$, is an $\mathcal{A}$ -valued norm on $B(X)$ and $(B(X), \|\cdot\|_{B(X)})$ is a Banach $\mathcal{A}$ -module.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ be a finite measure space and let τ be a μ -preserving transformation in $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. If $Uf(\omega) = f(\tau(\omega))$ is an unitary operator in a Hilbert space $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, then a well known Blum-Hanson theorem [2] asserts that $\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U^{k_i} f)\}$ strongly converges in the $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ for all strictly increasing sequences $k_0 < k_1 < \dots$ of positive integers and all $f \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ if and only if τ is a strongly mixing transformation, that is $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n(A) \cap B) \rightarrow \mu(A) \cdot \mu(B)$ for all $A, B \in \mathcal{F}$. In [1, Theorem 1.2] a version of the Blum-Hanson theorem is proved for any linear contraction in a complex Hilbert space. Below we give a variant of the Blum-Hanson theorem for all contractions $T \in B(X)$ in the case of Kaplansky-Hilbert $\mathcal{A}$ -module X .

Theorem 1. *Let $(X, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ be a Kaplansky-Hilbert $\mathcal{A}$ -module, let $T \in B(X)$ and let $\|T\|_{B(X)} \leq \mathbf{1}$. Then for any x in X , $T^n x \rightarrow x_0$ weakly if and only if $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T^{k_i} x \rightarrow x_0$ strongly for all strictly increasing sequences $\{k_i\}_{i=1}^\infty$ of positive integers.*

References

[1]. Akcoglu M., Sucheston L., On operator convergence in Hilbert space and in Lebesgue space, Period. Math. Hungar. Vol. 2 (1972), pp. 235–244.

[2]. Blum J.R., Hanson D.L., On the mean ergodic theorem for subsequences, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 66 (1960), pp. 308–311.

Equivalence of curves in Pseudo-Galilean geometry

Chilin V.I., Muminov K.K

National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

e-mail: vladimirchil@gmail.com, m.muminov@rambler.ru

Let $\mathbb{R}^n$ be an n -dimension linear space over the field of real numbers $\mathbb{R}$, and let G be a subgroup in the group $GL(n, \mathbb{R})$ of all invertible linear transformations in $\mathbb{R}^n$. Curves $\alpha, \beta \subset \mathbb{R}^n$ are called G -equivalent, if $g(\alpha) = \beta$ for some $g \in G$. In this note we give the criterion for equivalence of curves with respect to the action of Pseudo-Galilean group $\Gamma O(n, p)$ (the definition of group $\Gamma O(n, p)$ see in [1]).

Path in $\mathbb{R}^n$ is a vector function $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ such that the coordinate functions $x_j(t)$ are C^∞ -differentiable, $j = 1, \dots, n$. The r -th derivative of a path $\vec{x}(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ is a vector-function $\vec{x}^{(r)}(t) = \{x_j^{(r)}(t)\}_{j=1}^n$, where $x_j^{(r)}(t)$ is the r -th derivative of the coordinate function $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, $r = 1, 2, \dots$. We say that a path $\vec{x}(t)$ is Γ_n -regular if $\det M_{n-1}(\vec{x}(t)) \neq 0$ for all $t \in (0, 1)$, where $M_{n-1}(\vec{x}(t))$ is a $n \times n$ -matrix $(x_j^{(i)}(t))$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, $j = 2, \dots, n$, $x_j^{(0)}(t) = x_j(t)$.

Let $\vec{x}(t)$ be a Galilean path, that is, $x_1^{(1)}(t) \neq 0$ for all $t \in (0, 1)$. In this case there exists a finite integral $l_{\vec{x}}(c, d) = \int_c^d |x_1^{(1)}(t)| dt > 0$ for all $0 < c < d < 1$. We say that a path $\vec{x}(t)$ has the type (L1), if $l_{\vec{x}}(0, d) = \lim_{c \rightarrow 0} l_{\vec{x}}(c, d) < \infty$, $l_{\vec{x}}(c, 1) = \lim_{d \rightarrow 1} l_{\vec{x}}(c, d) < \infty$ (respectively, (L2), if $l_{\vec{x}}(0, d) < \infty$, $l_{\vec{x}}(c, 1) = +\infty$) (respectively, (L3), if $l_{\vec{x}}(0, d) = +\infty$, $l_{\vec{x}}(c, 1) < \infty$) (respectively, (L4), if $l_{\vec{x}}(0, d) = +\infty$, $l_{\vec{x}}(c, 1) = +\infty$). Set $I(\vec{x}) = (A(\vec{x}), B(\vec{x})) \subset \mathbb{R}$, where $A(\vec{x}) = 0$, $B(\vec{x}) = \int_0^1 L(\vec{x}^{(1)}(t)) dt$ if a path $\vec{x}(t)$ has type (L1) (respectively, $A(\vec{x}) = 0$, $B(\vec{x}) = +\infty$, if $\vec{x}(t)$ has type (L2)) (respectively, $A(\vec{x}) = -\infty$, $B(\vec{x}) = 0$, if $\vec{x}(t)$ has type (L3)) (respectively, $A(\vec{x}) = -\infty$, $B(\vec{x}) = +\infty$, if $\vec{x}(t)$ has type (L4)).

Let $p_{\vec{x}} : (0, 1) \rightarrow I(\vec{x})$ be a function such that $p_{\vec{x}}(t) = \int_0^t |x_1^{(1)}(s)| ds$ if a path $\vec{x}(t)$ has type (L1) or (L2) (respectively, $p_{\vec{x}}(t) = -\int_t^1 |x_1^{(1)}(s)| ds$, if $\vec{x}(t)$ has type (L3)) (respectively, $p_{\vec{x}}(t) = \int_{a_I}^t |x_1^{(1)}(s)| ds$, for some $a_I \in (0, 1)$, if $\vec{x}(t)$ has type (L4)). Let $q_{\vec{x}}(s) : I(\vec{x}) \rightarrow (0, 1)$ be an inverse function of the function $p_{\vec{x}}$.

Теорема 1. *Let γ and β be an oriented curves, generated by a Γ_n -regular Galileo paths $\vec{x}$ and $\vec{y}$, let $\vec{u}(s) = \vec{x}(q_{\vec{x}}(s))$, $s \in I(\vec{x})$, and $\vec{v}(r) = \vec{y}(q_{\vec{y}}(r))$, $r \in I(\vec{y})$. Then curves γ and β are $\Gamma O(n, p)$ -equivalent, $p \in \{1, \dots, n-1\}$, if and only if $I(\vec{x}) = I(\vec{y})$, $v_1(t) = \pm u_1(t)$ and*

$$\sum_{i=2}^p (u_i^{(k)}(t))^2 - \sum_{i=p+1}^n (u_i^{(k)}(t))^2 = \sum_{i=2}^p (v_i^{(k)}(t))^2 - \sum_{i=p+1}^n (v_i^{(k)}(t))^2$$

for all $t \in I(\vec{x})$ and $k = 0, 1, \dots, n-2$.

References

- [1]. Muminov K.K., Chilin V.I., A Transcendence Basis in the Differential Field of Invariants of Pseudo-Galilean Group, Russian Mathematics, Vol. 63 (2019), No 3, pp. 15–24.

The Fokas' method for inverse control problem for heat equation on simple metric graph

Eshimbetov M.R., Sobirov Z.A., Akhmedov M.I.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: mr.eshimbetov92@gmail.com

Consider simple metric graph Γ with three finite bonds connected on the point O . The point O called to be a vertex of the graph. We label the bonds of the graph as $B_j, j = \overline{1, 3}$. Define coordinate x_j on the bond B_j for $j = \overline{1, 3}$ corresponding it to the intervals $(0, L_j)$. At each bond the vertex point O has a coordinate 0. Further we will use x instead of x_j .

We consider the equations of heat dissipation in each bond of the given graph

$$V_t^{(j)}(x, t) = V_{xx}^{(j)}(x, t) + f^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, 3} \quad (6)$$

with initial conditions

$$V^{(j)}(x, 0) = V_0^{(j)}(x), \quad x \in \overline{B_j}, \quad j = \overline{1, 3} \quad (7)$$

and boundary conditions

$$V^{(j)}(x, t)|_{x=L_j} = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (8)$$

Moreover, we need to define the following gluing conditions for connectivity of the graph

$$V^{(1)}(0, t) = V^{(2)}(0, t) = V^{(3)}(0, t), \quad \sum_{j=1}^3 \delta_j^2 V_x^{(j)}(0, t) = 0. \quad (9)$$

The last conditions usually called continuity and flux conservation (Kirchhoff) conditions on branching point of the graphs.

We suppose, that initial data are smooth enough functions and they satisfies the conditions (57)-(58).

Our task is to find the functions $\{V^{(j)}(x, t), f^{(j)}(x), j = \overline{1, 3}\}$ that satisfy the equation (55), the conditions (56)-(58) and additional condition $V^{(j)}(x, T) = V_T^{(j)}(x), j = \overline{1, 3}$.

The solution of this inverse problem found by unified transformation (Fokas) method [1-3].

References

- [1]. Fokas A. S. A Unified Approach to Boundary Value Problems. 2008., p: 352.
 [2]. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graphs. Uz.Math. Journal, 2019, No 1.

[3]. G.Khudayberganov, Z.A.Sobirov, M.R.Eshimbetov Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2019, 12(4), 412–420.

A metric on the space of idempotent probability measures on metrisable space

Eshqobilova D. T.

Termez State University

e-mail: dilrabotermmez@mail.ru

Let X be a compact Hausdorff space ($\equiv$ a compact), $C(X)$ be the algebra of continuous functions on X with usual algebraic operations. On $C(X)$ operations $\oplus$ and $\odot$ we will determine by rules $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ and $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$ where $\varphi, \psi \in C(X)$.

A functional $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ is called an *idempotent probability measure on X* if it satisfies the following properties: (i) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$ (*norm axiom*); (ii) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in C(X)$ (*homogeneity axiom*); (iii) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ for any $\varphi, \psi \in C(X)$ (*additivity axiom*). The number $\mu(\varphi)$ is called the Maslov's integral corresponding to μ . The set of all idempotent probability measure on X we denoted by $I(X)$. We have $I(X) \subset \mathbb{R}^{C(X)}$. Consider $I(X)$ with induced from $\mathbb{R}^{C(X)}$ topology. The sets of the look $\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon \rangle = \{\nu \in I(X) : |\nu(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}$ form a base of neighborhoods of an idempotent probability measure $\mu \in I(X)$ concerning to this topology. Here $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$. It is well known that for any compact X the space $I(X)$ is also a compact. Let $f : X \rightarrow Y$ be a continuous map of compacts. Then the equality $I(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$, $\mu \in I(X)$, $\varphi \in C(Y)$, defines a map $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$ which is continuous. For an idempotent probability measure $\mu \in I(X)$ we define its support: $\text{supp}\mu = \bigcap \{F \subset X : F \text{ is a closed subset of } X \text{ and } \mu \in I(F)\}$.

For a Tychonoff space X we put $I_\beta(X) = \{\mu \in I(\beta X) : \text{supp}\mu \subset X\}$, where βX is the Stone-Čech compactification of X .

Consider a metrisable space (X, ρ) . We introduce a function $\rho_I : I_\beta(X) \times I_\beta(X) \rightarrow \mathbb{R}$ defined as following

$$\rho_I(\mu_1, \mu_2) = \inf\{\sup\{\rho(x, y) : (x, y) \in \text{supp}\xi\} : I_\beta(\pi_i)(\xi) = \mu_i, i = 1, 2\}. \quad (10)$$

Here $\pi_i : X^2 \rightarrow X$ are the projection onto i -th factor.

Theorem 1. The function ρ_I defined by (1) is a metric on $I_\beta(X)$ which is an extension of the metric ρ .

Theorem 2. The metric ρ_I generates the point-wise convergence topology on $I_\beta(X)$.

Proposition 1. $\text{diam}(I_\beta(X), \rho_I) = \text{diam}(X, \rho)$.

References

- [1]. Zaitov A., On metrisation of the space of idempotent probability measures, arXiv:1905.02466 [math.GN] 7 May 2019.
- [2]. Zaitov A. A., Ishmetov A. Ya. On monad generating by the functor I_β . //Vestnik of National University of Uzbekistan. 2013. No 2. P. 61-64.

Fixed points and coincidences in ordered sets and game theory

Fomenko T.N.

Lomonosov Moscow State University

e-mail: tn-fomenko@yandex.ru

The report is based on joint papers [1,2] by the author and D.A. Podoprikhin.

Let $(X, \preceq_X)$ and $(Y, \preceq_Y)$ be ordered sets. In 1984, J. W. Walker introduced the notion of the homotopy of isotone mappings of ordered sets, which is a natural extension of topological homotopy on finite sets. In [1], we extended this notion by abandoning the isotonicity condition and gave the following definition.

Definition 1. Two mappings $f, g : X \rightarrow Y$ are said to be *order homotopic* if there exists a finite sequence of mappings $h_0, h_1, \dots, h_n : X \rightarrow Y$ such that $f = h_0 \leq h_1 h_2 \dots h_n = g$, where $h_i \leq h_j$ means that $h_i(x) \preceq_Y h_j(x)$ for all $x \in X$. It is easily seen that the order homotopy is an equivalence relation.

In the category of topological spaces and continuous mappings, there are known results on the preservation of the fixed-point existence property of a mapping (the coincidence-point existence property of a pair of mappings) by homotopies. Theorems on the preservation of the fixed point (coincidence) existence property for single-valued mappings by some order homotopies are presented in [1]. Here we introduce the notion of a *multivalued order homotopy* of mappings of ordered sets and consider similar problems for multivalued mappings.

As it is known, the game theory studies mathematical models of conflict situations. In the case of a two-person game, let X, Y be sets of feasible strategies for players I and II, respectively. The game rules for players I and II can be described as multivalued mappings $A : Y \rightrightarrows X$ and $B : X \rightrightarrows Y$, where $A(y) \subseteq X, B(x) \subseteq Y$ are subsets consisting of the best answers of Players I, II to strategies y and x of the correspondent opponent, respectively.

Definition 2. A pair of strategies (x_0, y_0) is said to be *equilibrium* iff $x_0 \in A(y_0)$ and $y_0 \in B(x_0)$, i.e. the point (x_0, y_0) is a fixed point of the multivalued mapping $P = A \times B : X \times Y \rightarrow X \times Y$, where $P(x, y) = (A \times B)(x, y) := A(y) \times B(x)$.

Usually, the classical Kakutani fixed point theorem or some its generalizations are applied to the existence problem of an equilibrium pair of strategies. In the report, this problem is considered from the viewpoint of the fixed point theory for multivalued mappings of ordered sets. We assume that the set X, Y of strategies are ordered, describe the corresponding order on the product $X \times Y$, and apply our fixed point theorems.

With the help of our multivalued homotopy results, one can get statements on the preservation of the equilibrium strategies existence property by some finite sequences of changes of the game function, in the case of the antagonistic game with two players.

References

- [1] D. A. Podoprikhin and T. N. Fomenko, "Preservation of the existence of fixed and coincidence points under homotopy of mappings of ordered sets", Dokl. Math. 96 (3), 591–593 (2017). [2] D. A. Podoprikhin and T. N. Fomenko, "Multivalued Homotopy on an Ordered Set, Fixed, and Coincidence Points of Mappings, and Applications in Game Theory", Mathematical Notes, 2019, Vol. 106, No. 4, pp. 113–123.

On statistical convergences of sequences of closed sets in metric spaces

Georgiou D. N.

University of Patras, Department of Mathematics, 26504 Patras, Greece

e-mail: georgiou@math.upatras.gr

Coauthors: Megaritis A. C., Prinos G. A. and Sereti F.

Extended concepts of limits of sequences of points to sequences of sets have been introduced by Painleve in 1902 in his lectures on analysis at the University of Paris under the names of upper and lower limits of sets; set convergence was defined as the equality of these two limits. They were then popularized by Kuratowski in [16] and thus, often called Kuratowski lower and upper limits of sequences of sets. Kuratowski convergence, along with other convergence notions of sequences of sets like convergence in the Hausdorff metric, under the name Hausdorff convergence, and Wijsman convergence [28,29], a variation of Hausdorff convergence suitable for work with unbounded sets, have rekindled the interest for ever-expanding applications to optimization problems, random sets, economics, and other topics. The books by Aubin and Frankowska [3], Beer [5], Rockafellar and Wets [21] along with the survey articles of Sonntag and Zlalescu [24] and Lucchetti and Torre [18], Salinetti and Wets [23], reflect this shift in emphasis.

The concept of convergence of a sequence of real numbers has been extended to statistical convergence of sequences and studied it in detail (see for example [6-10], [12-15], [20]). Nuray and Rhoades in [19] introduced and studied statistical analogues for convergences of sequences of sets followed by Talo et.al. in [26]. Specifically, in [19] authors studied Hausdorff and Wijsman statistical convergence and in [26] authors investigated properties of statistical inner and outer limits and examined the relationship between Kuratowski statistical convergence and Hausdorff statistical convergence.

In this talk, we do further investigations on the statistical inner and outer limits of sequences of closed sets in metric spaces, which were introduced in [19] and [26] and generalize the conventional Painleve-Kuratowski inner and outer limits. Also, we provide criteria for checking statistical Wijsman and Hausdorff set convergences and we examine the relationship between Kuratowski and Wijsman statistical convergence. A closer look on the concept of statistical Cauchyness, with respect to the Hausdorff “extended” metric h , completes this research.

References

- [1] Aliprantis, C. D. —Border, K.: Infinite dimensional analysis: A hitchhiker’s guide, Springer, Berlin, 2006.
- [2] Anastassiou, G. A.—Duman, O.: Towards intelligent modeling: statistical approximation theory, Intelligent Systems Reference Library 14, Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [3] Aubin, J.-P.—Frankowska, H.: Set-valued analysis, Modern Birkhoouser Classics, Boston, 2009.
- [4] Baronti, M.—Papini, P. L.: Convergence of sequences of sets, Methods of functional analysis in approximation theory (Bombay, 1985), 135–155, Internat. Schriftenreihe Numer. Math. 76, Birkhoouser, Basel, 1986.
- [5] Beer, G.: Topologies on closed and closed convex sets, Mathematics and its Applications 268, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

- [6] Caserta, A.—Di Maio, G.—Kočinac, L. D. R.: Statistical convergence in function spaces, *Abstr. Appl. Anal.* (2011), Art. ID 420419, 11 pp.
- [7] Caserta, A.—Kočinac, L. D. R.: On statistical exhaustiveness, *Appl. Math. Lett.* **25** (2012), no. 10, 1447–1451.
- [8] Činčura, J.—Šalát, T.—Sleziak, M.—Toma, V.: Sets of statistical cluster points and $\mathcal{I}$ -cluster points, *Real Anal. Exchange* **30** (2004/05), no. 2, 565–580.
- [9] Dems, K.: On $\mathcal{J}$ -Cauchy sequences, *Real Anal. Exchange* **30** (2004/2005), 123–128.
- [10] Di Maio, G.—Kočinac, L. D. R.: Statistical convergence in topology, *Topology Appl.* **156** (2008), no. 1, 28–45.
- [11] Engelking, R.: General topology, *Sigma Series in Pure Mathematics* 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [12] Fast, H.: Sur la convergence statistique, (French) *Colloq. Math.* **2** (1951), 241–244.
- [13] Fridy, J. A.: On statistical convergence, *Analysis* **5** (1985), no. 4, 301–313.
- [14] Fridy, J. A.: Statistical limit points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 4, 1187–1192.
- [15] Fridy, J. A.—Orhan, C.: Statistical limit superior and limit inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 12, 3625–3631.
- [16] Kuratowski, C.: Topologie, Vol. I. (French) *Monografie Matematyczne, Tom 20*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1958.
- [17] Loohne, A.—Zlălinescu, C.: On convergence of closed convex sets, *J. Math. Anal. Appl.* **319** (2006), no. 2, 617–634.
- [18] Lucchetti, R.—Torre, A.: Classical set convergences and topologies, *Set convergence in nonlinear analysis and optimization, Set-Valued Anal.* **2** (1994), no. 1-2, 219–240.
- [19] Nuray, F.—Rhoades, B. E.: Statistical convergence of sequences of sets, *Fasc. Math. No.* **49** (2012), 87–99.
- [20] Pehlivan, S.—Göncü, A.—Mamedov, M. A.: Statistical cluster points of sequences in finite dimensional spaces, *Czechoslovak Math. J.* **54(129)** (2004), no. 1, 95–102.
- [21] Rockafellar, R. T.—Wets, R. J.-B.: Variational analysis, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 317, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [22] Šalát, T.: On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slovaca* **30** (1980), no. 2, 139–150.
- [23] Salinetti, G.—Wets, R. J.-B.: On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, *SIAM Rev.* **21** (1979), no. 1, 18–33.
- [24] Sonntag, Y.—Zlălinescu, C.: Set convergences. An attempt of classification, *Trans. Amer. Math. Soc.* **340** (1993), no. 1, 199–226.
- [25] Sonntag, Y.—Zlălinescu, C.: Scalar convergence of convex sets, *J. Math. Anal. Appl.* **164** (1992), no. 1, 219–241.
- [26] Talo, oO.—Sever, Y.—Başar, F.: On statistically convergent sequences of closed sets, *Filomat* **30** (2016), no. 6, 1497–1509.
- [27] Tortop, Ş.—Sever, Y.—Talo, oO.: On statistically convergent sequences of closed sets and epigraphs, *Journal of Inequalities and Special Functions* **10** (2019), no. 2, 10–20.
- [28] Wijsman, R. A.: Convergence of sequences of convex sets, cones and functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 186–188.
- [29] Wijsman, R. A.: Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **123** (1966), 32–45.

Products and sequences

Gryzlov A.A.

Udmurt State University

e-mail: gryzlov@udsu.ru

By the classical Hewitt – Marczewsky – Pondiczery theorem the Tychonoff product of 2^ω many separable spaces is separable.

We consider the problem of the existence in the Tychonoff product of 2^ω many separable spaces a dense countable subset Q , which contains no nontrivial convergent in the product sequences, and therefore is the sequentially closed subset of the product .

We prove the following.

Theorem. In the product of 2^ω many of separable not single point T_1 -spaces $\{Z_\alpha : \alpha \in 2^\omega\}$ there is a countable set Q , which contains no nontrivial convergent in the product sequences.

This theorem implies that the countable dense set, which contains no nontrivial convergent sequences exists:

- in I^{2^ω} , where I is closed unit interval (W.H. Priestley, [1]);
- in D^{2^ω} , where D is the two-point discrete space (P.Simon, [2]);
- in Z^{2^ω} , where Z is a separable not single point T_1 - space (A.Gryzlov, [3]);
- in the product of 2^ω many separable not single point T_2 -spaces (A.Gryzlov, [4]).

References

- [1].W. H. Priestley, A sequentially closed countable dense subset of I^I , Proc. Amer. Math. Soc., 24 (1970), no.2, 270–271.
- [2]. P. Simon, Divergent sequences in compact Hausdorff spaces, Coll. Math. Soc. János Bolyai, 23. Budapest, (1978), 1087–1094.
- [3]. A. A. Gryzlov, On dense subsets of Tychonoff products of T_1 -spaces, Topology and its Appl. 248(2018), 164–175.
- [4]. A. A. Gryzlov, On dense subsets, convergent sequences and projections of Tychonoff products, Topology and its Appl. 233(2018), 52-60.

Pursuit-evasion game on the prism and pyramid in the space R^3 .

Holboyev A.G.

Tashkent Pedagogical Universitet, Uzbekistan, Tashkent

e-mail: azamatholboyev@gmail.com

It is given a 1-skeleton graph $M = \{M_P, M^P\}$ in Euclidian space R^3 , where M_P is prism and M^P is pyramid with k angles. In the game, the points $P_1, P_2, \dots, P_n$ and Q are moving along the graph M with velocities not greater than ρ . One may assume that $\rho = 1$ and the length of all edges of the graph M is 1. The points $P_1, P_2, \dots, P_n$ are referred as pursuers; the set of points $P_1, P_2, \dots, P_n$ denoted by P . The point Q is an evading player. At the initial time $t = 0$ the points have positions $P(0)$ and $Q(0)$. If each of players choose a certain control method, then the points move along some trajectories

$P(t), Q(t)$. The control methods must ensure the phase constraint $P_k(t), Q(t) \in M$ for all $t \geq 0, k = 1, 2, \dots, n$. A pair of such control methods forms a single game. We say that the player P wins in a game if $P_k(t) = Q(t)$ for some $k = 1, 2, \dots, n$ and $t \geq 0$. The player Q wins in a game if $P_k(t) \neq Q(t)$ for all $k = 1, 2, \dots, n$ and $t \geq 0$ [1-2].

Obviously, if n is large enough then the group of pursuers can win in the game. The least value of n that n pursuers win, will be denoted by $N(M)$.

Theorem 1. $N(M_P) = M(M^P) = 2$.

References

- [1]. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. I. // Automation and Remote Control. 2017. V. 78. No. 4. pp. 754-761.
- [2]. Azamov A.A., Kuchkarov A.Sh., Holboyev A.G. The pursuit-evasion game on the 1-skeleton graph of regular polyhedron. II. // Automation and Remote Control. 2018. V. 78. No 10. pp. 345-351.

On spaces continuously containing topological groups

Iliadis S.D.

Moscow State University (M.V. Lomonosov)

e-mail: s.d.iliadis@gmail.com

It is well-known the open problem (see [?]) concerning the existence of universal elements in the class of all topological groups of weight less than or equal to a fixed uncountable cardinal. In [?], as an alternative of universal topological groups, we introduce the notion of a space continuously containing a given collection of topological groups. Below, we give the definition of these spaces.

Definition. Given an indexed collection $\mathbf{G}$ of topological groups, let Q be a topological space, and let $h_Q^G, G \in \mathbf{G}$, be a topological embedding of G into Q . We say that Q is a *continuously containing space for $\mathbf{G}$ with respect to the collection $\{h_Q^G : G \in \mathbf{G}\}$* if the following conditions are satisfied:

- (a) For any points $x, y \in G \in \mathbf{G}$ and each neighbourhood U of $h_Q^G(xy)$ in Q , there exist neighbourhoods V and W in Q of $h_Q^G(x)$ and $h_Q^G(y)$, respectively, such that, for any points $x', y' \in G' \in \mathbf{G}$ such that $h_Q^{G'}(x') \in V$ and $h_Q^{G'}(y') \in W$, we have $h_Q^{G'}(x'y') \in U$;
- (b) For any $x \in G \in \mathbf{G}$ and each neighbourhood U of $h_Q^G(x^{-1})$ in Q there exists a neighbourhood V of $h_Q^G(x)$ in Q such that, for each $x' \in G' \in \mathbf{G}$ for which $h_Q^{G'}(x') \in V$, we have $h_Q^{G'}((x')^{-1}) \in U$;
- (c) $\cup\{h_Q^G(G) : G \in \mathbf{G}\} = Q$.

Definition. We say that a topological space Q is *continuously containing for an indexed collection $\mathbf{G}$ of topological groups* if, for each $G \in \mathbf{G}$, **there exists** a topological embedding h_Q^G of X into Q such that the space Q is continuously containing space for $\mathbf{G}$ with respect to the collection $\{h_Q^G : G \in \mathbf{G}\}$.

In my talk, we shall concern the following aspects of spaces, continuously containing topological groups.

(1) We show the existence of universal elements in classes of spaces, continuously containing topological groups.

(2) We define the notion of an *action* of a space, continuously containing topological groups, on a topological space and consider some embedding theorems.

References

[1]. Stavros Iliadis, *On embeddings of topological groups*, Fundamental and Applied Mathematics, Vol 20, No.2, 2015, pp. 105-112 (Russian). Journal of Mathematical Sciences, 2017, 223:6, 720-724 (English).

[2]. V.V. Uspenskij, *On the group of isometries of the Urysohn universal metric space*, Comment.Math.Univ.Carolinae 31, 1(1990), 181-182.

On the monad $\mathbb{I}_f$

Ishmetov A. Ya.

Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering
e-mail:ishmetov_azadbek@mail.ru

For a compact Hausdorff space (abbr. compact) X on the algebra $C(X)$ of continuous functions on X with usual algebraic operations we will determine new operations $\oplus$ and $\odot$ by rules $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ and $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, where $\varphi, \psi \in C(X)$. A functional $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be an idempotent probability measure on X if it satisfies the following properties (1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$, where λ_X – constant function; (2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in C(X)$; (3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ for all $\varphi, \psi \in C(X)$. A set of all idempotent probability measures on X we denote by $I(X)$. We consider $I(X)$ as subspace of $\mathbb{R}^{C(X)}$.

For given compacts X, Y and continuous map $f: X \rightarrow Y$ by a formula $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$ it determines a map $I(f): I(X) \rightarrow I(Y)$ which is continuous. So, the construction I puts to each compact a compact and to each map a map, i. e. it is a functor. Moreover I is a normal functor. Therefore for each idempotent probability measure $\mu \in I(X)$ one may determine its support: $\text{supp } \mu = \bigcap \{A \subset X : \overline{A} = A, \mu \in I(A)\}$. For a positive integer n and a compact X we define a set $I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\text{supp } \mu| \leq n\}$. Put $I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X)$. Idempotent probability measure $\mu \in I_\omega(X)$ is called an idempotent probability measure with finite support.

We determine a subfunctor I_f of the functor I of idempotent probability measures. For a given compact X a set $I_f(X)$ consists of idempotent probability measures with finite support such that if the support of a measure μ consists from n points $x_1, x_2, \dots, x_n$, then just one of these points' *max-plus*-barycenter mass is equal to zero, all of the other masses are not greater than $-\ln(n+1)$. By definition

$$I_f(X) = \{\mu = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i \odot \delta_{x_i} \in I_\omega(X) : \text{the equality } \lambda_i = 0 \text{ holds for only unique index } i_0 \text{ and } \lambda_i \leq -\ln(n+1) \text{ for all } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}\}.$$

This functor is interesting in the fact that it is a functor with the finite support, and has not finite degree. The functor $I_f: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ is a normal subfunctor of a functor I idempotent probability measures. The following theorem is the main result of the note.

Theorem 1. The triple $\mathbb{I}_f = \langle I_f; \psi; \eta \rangle$ forms a monad in the category *Comp*.

References

- [1]. Zaitov A. A., Ishmetov A. Ya., Homotopy properties of the space $I_f(X)$ of idempotent probability measures, *Mat. Zametki*, Vol. 106(2019), No 4, pp. 531–542. <https://doi.org/10.4213/mzm12166>.
- [2]. Ishmetov A. Ya., Functor I_f of idempotent probability measures, *Bulletin of Science and Practice*, Vol. 5(2019), No 4, pp. 24–29. <https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02> (in Russian).
- [3]. Zaitov A. A., Geometrical and topological properties of the subspace $P_f(X)$ of probability measures, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* (2019), No 10, pp. 28–37. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-10-28-37 (in Russian).

Dimension of finite approximation for metrizable functors

Ivanov A.V.

*Institute of Applied Mathematical Research
of Karelian Research Centre Russian Academy of Sciences.
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru*

Let $\mathcal{F}$ be a seminormal metrizable functor, (X, ρ) a metric compact, $\rho_{\mathcal{F}}$ a functorial extension of the metric ρ to $\mathcal{F}(X)$ and $\mathcal{F}_n(X)$ is the subspace $\mathcal{F}(X)$ consisting of points ξ whose support $\text{supp}(\xi)$ contains no more than n elements ($n \in \omega_0$). For each $\xi \in \mathcal{F}(X)$ and a real number $\varepsilon > 0$ we set $N(\xi, \varepsilon) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}$ ($N(\xi, \varepsilon)$ is well defined since $\bigcup_{n \in \omega_0} \mathcal{F}_n(X)$ is everywhere dense in $\mathcal{F}(X)$). For any point $\xi \notin \bigcup_{n \in \omega_0} \mathcal{F}_n(X)$ the number $N(\xi, \varepsilon)$ increases unlimitedly when $\varepsilon \rightarrow 0$. The rate of this increase is characterized by

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\xi, \varepsilon)}{-\ln \varepsilon},$$

which we call the dimension of finite approximation of the point ξ (if the specified limit does not exist, we consider the upper or lower limit and get the upper $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ or the lower $\underline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi)$ dimensions of finite approximation).

If we take the exponential functor $\exp$ with the Hausdorff metric as $\mathcal{F}$, then $\dim_{\mathcal{F}}(A)$ coincides with the box dimension $\dim_B A$ for any $A \in \exp(X)$. For the probability functor P metrized by the Kantorovich-Rubinstein metric, the dimension of finite approximation $\dim_P(\mu)$ coincides with the quantization dimension of the measure $\mu \in P(X)$. Thus, we are talking about a functorial generalization of classical concepts.

For the superextension functor λ , the dimension of finite approximation was studied in [1]. For all the functors listed above and for any $\xi \in \mathcal{F}(X)$, the following inequality holds:

$$\dim_{\mathcal{F}}(\xi) \leq \dim_B(\text{supp}(\xi)). \quad (1)$$

For functors λ and $\exp$ the following theorem on intermediate values of the dimension $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}$ is proved: for any infinite metric compact (X, ρ) and any non-negative real number $b \leq \dim_B X$ there exists $\xi \in \mathcal{F}(X)$ such that $\overline{\dim}_{\mathcal{F}}(\xi) = b$. Moreover, for the functor λ we may additionally require that $\text{supp}(\xi) = X$.

The obtained results allow us to formulate a number of natural questions, including: 1) whether inequality (1) is true for any metrizable seminormal functor, 2) whether the intermediate value theorem for the functor P holds, and others. In connection with this problems, it is of interest to find general conditions for the metrizability of seminormal (normal) functors (currently, the properties of metrizability are established only for specific functors).

References

- [1]. Ivanov A.V., Fomkina O.V., On the order of metric approximation of maximal linked systems and capacitarian dimensions, Trans. of Karelian Research Centre of RAS (2019), no. 7, 3–12.

On uniformly distributed probability measures on metric compacts

Ivanov A.V.

*Institute of Applied Mathematical Research
of Karelian Research Centre Russian Academy of Sciences.
e-mail: alvlivanov@krc.karelia.ru*

The following question is considered: on which metric compacts does a uniformly distributed probability measure exist? This question is related to the problem of determining the uniformly distributed probability measure on a metric compactum. The proposed approach is based on the idea of approximating the desired measure by uniformly distributed measures with finite supports where these supports must be «uniformly distributed» on the compact (X, ρ) in the geometric sense.

Definition 1. The sequence $\mu_n = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{k_n} \delta_{x_i}$, $n \in N$ of uniformly distributed probability measures with finite supports $\text{supp}(\mu_n) = A_n = \{x_1, \dots, x_{k_n}\}$ will be called *admissible* if $k_n = \min\{m : \rho_H(X, \exp_m X) \leq 1/n\}$ and $\rho_H(A_n, X) \leq 1/n$ (ρ_H is the Hausdorff metric on $\exp X$). We say that the metric compact (X, ρ) is *stable* if any admissible sequence has a limit. If a compact is stable, then all its admissible sequences converge to one measure, which we denote by μ_X^u . If $\text{supp}(\mu_X^u) = X$, then we call the measure μ_X^u *uniformly distributed* on X and say that the metric compact (X, ρ) *admits uniformly distributed measure*.

Example 1. If the compact (X, ρ) has only one nonisolated point a , then X is stable, and $\mu_X^u = \delta_a$.

Example 2. There exists a metric compact with only two nonisolated points that is not stable.

Example 3. The standard Cantor perfect set Π lying on the segment $[0, 1]$ admits a uniformly distributed measure.

Example 4. There exist the metrics ρ_1, ρ_2 compatible with the topology on the Cantor perfect set Π such that (Π, ρ_1) is not stable and (Π, ρ_2) is stable, but does not admit a uniformly distributed measure.

The following theorem shows that Definition 1 is consistent with the classical notions of a uniformly distributed probability measure.

Theorem 1. A bounded canonically closed Jordan measurable subset X of (R^n, ρ) with metric ρ defined by the formula $\rho(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, n\}$, admits a uniformly distributed measure, and $\mu_X^u = \frac{1}{\mu(X)}(\mu|_X)$, where μ is a Lebesgue measure in R^n .

Proposition 1. If an infinite compact (X, ρ) admits a uniformly distributed measure, then X has no isolated points.

Theorem 2. If X admits a uniformly distributed measure, then for any closed subset $F \subset X$ with non-empty interior the following equalities hold:

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B X.$$

Thus, the compacta which admit a uniformly distributed measure are dimensionally homogeneous in the sense of box-dimension $\dim_B$.

On polynomial operators corresponding to graphs

Jamilov U.U., Mukhitdinov R.T.

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, e-mail:jamilovu@yandex.ru

Bukhara branch of Tashkent institute of irrigation and agricultural

mechanization engineers, e-mail:muxitdinov-ramazon@rambler.ru

Denote $S := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1\}$. Clearly, S - is the closed convex hull of vectors of the form $\mathbf{e}^{(i)} = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, where the unite is the i -th position, and precisely these vectors are the extreme elements of $S[2]$. For a natural $d \geq 2$ we define an operator $V : S \rightarrow S$ as follows

$$V(\mathbf{x})_k := \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_d=1}^{\infty} P_{i_1 \dots i_d, k} x_{i_1} \cdots x_{i_d}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

where the coefficients $P_{i_1 \dots i_d, k}$ satisfy

$$(i) \quad P_{i_1 \dots i_d, k} \geq 0, \quad (ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} P_{i_1 \dots i_d, k} = 1 \quad \text{for all } i_1, \dots, i_d, k \in \{1, 2, \dots\}. \quad (12)$$

An operator V defined in this above way is called a *infinity dimensional polynomial stochastic operator* (IPSO) of degree d .

Let $G = (\Lambda, L)$ — be a graph without multiple edges, where Λ — is the set of vertices which is at most a countable set, L — is the set of edges of the graph G . Enumerate the vertices of the graph G by elements of $E = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\{\Lambda_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, is the set of connected components of the graph, where $n \geq 1$. Suppose that $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$, where $\Lambda_0 = \{x^0\}$, that is, the connected component Λ_0 consists from single point and Λ_1 is the Cayley tree of order $d - 2$, $d \geq 3$. We denote $\langle i_1, \dots, i_d \rangle$ if the vertices $\{i_1, \dots, i_d\}$ is a “star” of the tree, i.e. $x = i_1$ and $S(x) = \{i_2, \dots, i_d\}$, and by $\rangle i_1, \dots, i_d \langle$ we denote non stars. The coefficients of heredity we define as the following:

$$P_{i_1 \dots i_d, k} = \begin{cases} 1, & \text{if } \rangle i_1, \dots, i_d \langle, \quad k = 0, \quad i_1, \dots, i_d \in E; \\ 0, & \text{if } \rangle i_1, \dots, i_d \langle, \quad k \neq 0, \quad i_1, \dots, i_d \in E; \\ \geq 0, & \text{if } \langle i_1, \dots, i_d \rangle, \quad i_1, \dots, i_d \in E; \end{cases} \quad (13)$$

Definition 1. For any fixed graph G , IPSO degree d satisfying conditions (11), (12) and (13) is called the polynomial stochastic operator corresponding to the graph (PSOCCG).

Theorem 1. i) Any PSOCCG has a unique fixed point $(1, 0, \dots)$ and for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S$, the trajectory of PSOCCG tends to this fixed point exponentially rapidly;

ii) The function $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{\langle i_1, \dots, i_d \rangle} x_{i_1} \cdots x_{i_d}$ is a Lyapunov function for a PSOCCG.

References

- [1]. M. Scheutzwow, M. Wilke-Berenguer, Random delta-hausdorff-attractors, Discrete & Continuous Dynamical Systems - B 23 (3) (2018) 1199–1217.
- [2]. F.M. Mukhamedov, H. Akin, S. Temir, On infinite dimensional quadratic Volterra operators. J. Math. Anal. Appl. no. 2 (2005), 533–556.
- [3]. U. U. Jamilov, Cubic operators corresponding to graphs. Nonlinear Dynamics and System Theory. 16 (3) (2016) 294–299.

τ -II-completeness and hyperspace

Jumaev D. I.

Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering

e-mail: d-a-v-ran@mail.ru

For a collection $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ of subsets of a topological T_1 -space X and $M \subseteq X$ we put $\cup \omega = \cup \{O_\alpha : \alpha \in A\}$; $[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X : \alpha \in A\}$. For a cardinal number $\tau \geq \aleph_0$ a cover λ of the spaces X is said to be a τ -cover, if the power of λ is not greater than τ . For a space X , its some subspace W and a point $x \in X \setminus W$ they say that an open cover λ of the space W pricks out the point x in X if $x \notin \cup [\lambda]_X$. A space X is said to be τ -II-complete if for every point $x \in \beta X \setminus X$ there exists an open τ -cover ω of X which pricks out the point x in βX . A closed subset of a τ -II-complete space is τ -II-complete.

By $\exp X$ we denote a set of all nonempty closed subsets of a topological T_1 -space X . A family of sets of the view $O\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{F \in \exp X : F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset, \dots, F \cap U_n \neq \emptyset\}$ forms a base of a topology on $\exp X$, where $U_1, \dots, U_n$ are open nonempty sets in X . This topology is called *the Vietoris topology*. A space $\exp X$ equipped with the Vietoris topology is called *hyperspace* of X .

For a compact X its hyperspace $\exp X$ is also a compact. Let $f: X \rightarrow Y$ be a continuous map of compacts, $F \in \exp X$. We put $(\exp f)(F) = f(F)$.

For a Tychonoff space X we put

$$\exp_\beta X = \{F \in \exp \beta X : F \subset X\}.$$

It is clear, that $\exp_\beta X \subset \exp X$. Consider the set $\exp_\beta X$ as a subspace of the space $\exp X$. For a Tychonoff spaces X the space $\exp_\beta X$ is also a Tychonoff space with respect to the induced topology.

For a continuous map $f: X \rightarrow Y$ of Tychonoff spaces we put $\exp_\beta f = (\exp \beta f)|_{\exp_\beta X}$, where $\beta f: \beta X \rightarrow \beta Y$ is the Stone-C ech compactification of f .

In this work we announce the following result.

Theorem 1. For a Tychonoff space X its hyperspace $\exp_\beta X$ is τ -II-complete iff X is τ -II-complete.

References

- [1]. Arkhangel'sky A. V., Ponomarev V. I., Fundamentals of the general topology: Problems and Exercises, D.Reidel Publishing Company, Moscow, 415 pp, 1983.
- [2]. Musayev D. K., Pasynkov B. A., On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps, Fan, Tashkent, 124 pp, 1994.
- [3]. Zaitov A. A., Jumaev D. I., Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps, Universal Journal of Mathematics and Applications, Vol. 2, Issue 2, P. 65-69, 2019 DOI: <https://dx.doi.org/10.33401/fujma.503688>
- [4]. Zaitov A. A., Jumaev D. I., Hyperspaces of the Π -complete spaces and continuous maps, Eurasian Mathematical Journal, It is accepted for the publication.

The second cohomology group of noncommutative Jordan algebra of level one

Jumaniyozov D.E.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: jumaniyozovdoston50@gmail.com

Given an n -dimensional vector space $\mathbb{V}$, the set $Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$ is a vector space of dimension n^3 . This space has a structure of the affine variety $\mathbb{C}^{n^3}$. Indeed, let us fix a basis $e_1, e_2, \dots, e_n$ of $\mathbb{V}$. Then any $\mu \in Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$ is determined by n^3 structure constants $c_{i,j}^k \in \mathbb{C}$ such that $\mu(e_i \otimes e_j) = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k e_k$. A subset of $Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$ is *Zariski-closed* if it can be defined by a set of polynomial equations in the variables $c_{i,j}^k$ ($1 \leq i, j, k \leq n$).

Let Alg_n be the set of algebras of dimension n , known as a subset of the affine variety $Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$. The general linear group $GL(\mathbb{V})$ acts on Alg_n by conjugations:

$$(g * \mu)(x \otimes y) = g(\mu(g^{-1}(x) \otimes g^{-1}(y))).$$

for $x, y \in \mathbb{V}$, $\mu \in Alg_n \subset Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$ and $g \in GL(\mathbb{V})$. Thus, Alg_n is decomposed into $g \in GL(\mathbb{V})$ -orbits that correspond to the isomorphism classes of algebras. It is clear that if a subvariety of $Hom(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}, \mathbb{V})$ is specified by an identity or identities like commutativity, skew-symmetry, nilpotency, etc. then it is invariant under the action $*$. The closures of orbits under this action play a crucial role in the description of irreducible components of a variety of algebras.

Definition 1. An algebra λ is said to degenerate an algebra μ , if $Orb(\mu)$ lies in the Zariski closure of $Orb(\lambda)$. We denote this by $\lambda \rightarrow \mu$.

The degeneration $\lambda \rightarrow \mu$ is called a *direct degeneration* if there is no chain of non-trivial degeneration of the form: $\lambda \rightarrow \nu \rightarrow \mu$.

Definition 2 [1]. A level of an algebra λ is the maximum length of chain of direct degenerations, which, of course ends with the algebra $\mathfrak{a}$ (the algebra with zero multiplication). We denote the level of an algebra λ by $lev_n(\lambda)$.

Definition 3. An algebra $\mathfrak{J}$ is called *noncommutative Jordan algebra* if

$$\begin{aligned}(xy)x &= x(yx), \\ (x^2y)x &= x^2(yx).\end{aligned}$$

For some examples of the descriptions of varieties of Jordan algebras by means of the degeneration graphs we refer to the papers [2, 3] and others.

Let $\mathfrak{J}$ be a noncommutative Jordan algebra and $Z^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ be the space of the bilinear maps $h : \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$ such that

$$h(xy, x) + h(x, y)x = xh(y, x) + h(x, yx)$$

$$(h(a, a)b)a + h(a^2, b)a + h(a^2b, a) = a^2h(b, a) + h(a^2, ba) + h(a, a)(ba).$$

If $\mu : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$ is a linear mapping and $B^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ be the space of the bilinear maps $d\mu : \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}$ given by

$$d\mu(a, b) = \mu(a)b + a\mu(b) - \mu(ab),$$

then it lies in $Z^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$. The quotient space of $Z^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ by the space $B^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ is called the second cohomology group of $\mathfrak{J}$ and denoted by $H^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$. Usually the space $Z^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ is called 2-cocycle and $B^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ is called 2-coboundary.

Definition 4. A noncommutative Jordan algebra $\mathfrak{J}$ is called cohomologically rigid if

$$H^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}) = 0.$$

Consider n -dimensional noncommutative Jordan algebra $\nu_n(\alpha)$ with following multiplication table:

$$\nu_n(\alpha) : e_1e_1 = e_1, \quad e_1e_i = \alpha e_i, \quad e_ie_1 = (1 - \alpha)e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

In [4] it is shown that the algebra $\nu_n(\alpha)$ is algebra of level one.

It is well known that $\dim B^2(\mathfrak{J}, \mathfrak{J}) = n^2 - \dim \text{Der}(\mathfrak{J})$, where $\text{Der}(\mathfrak{J})$ is all derivations of algebra $\mathfrak{J}$. Since $\dim(\text{Der}(\nu_n(\alpha))) = n^2 - n$ we have $\dim B^2(\nu_n(\alpha), \nu_n(\alpha)) = n$.

Lemma 5. $\dim Z^2(\nu_3(\alpha), \nu_3(\alpha)) = \frac{n(n^2 - 2n + 3)}{2}$.

Theorem 6. $\dim H^2(\nu_3(\alpha), \nu_3(\alpha)) = \frac{n(n-1)^2}{2}$.

References

- [1]. Gorbatshevich V.V. Contractions and degenerations of finite-dimensional algebras, *Izvestiya Vuzov Matem.*, vol. 10, (1991), p. 19–27.
- [2]. Ancochea Bermúdez J.M., Fresán J., Margalef Bentabol J., Contractions of low-dimensional nilpotent Jordan algebras, *Communications in Algebra*, 39 (2011), 3, p.1139–1151.
- [3]. Kashuba I., Martin M.E. Deformations of Jordan algebras of dimension four, *J. Algebra*, 399 (2014) p.277–289.
- [4]. Khudoyberdiyev A., Omirov B., The classification of algebras of level one. *Linear Algebra and its Applications*, 439 (2013), 11, p.81–101.

Complete systems of $SO(2, R)$ -invariants of mappings of a fixed set to the two-dimensional Euclidean space

Djavvat Khadjiev, Gayrat Beshimov

National University of Uzbekistan, UzAS Institute of mathematics, 100174 Tashkent, Uzbekistan

Let E_2 be the two-dimensional Euclidean space and R be the field of real numbers. Denote by $\langle a, b \rangle$ the scalar product $a_1b_1 + a_2b_2$ of vectors $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in E_2$. Let $O(2, R)$ be the group of all orthogonal transformations of E_2 . It is known that every $F \in O(2, R)$ is linear. Denote by $SO(2, R)$ the set $\{F \in O(2, R) : \det(F) = 1\}$. It is a subgroup of $O(2, R)$. Let T be a nonempty set.

Definition 1. A mapping $\gamma : T \rightarrow E_2$ will be called a T -path in E_2 and denote it in the following form $\gamma(t)$.

Definition 2. Two T -paths $\gamma(t)$ and $\eta(t)$ in E_2 are called $SO(2, R)$ -equivalent if there exists $F \in SO(2, R)$ such that $\eta(t) = F(\gamma(t)), \forall t \in T$. This equivalence denoted by $\gamma(t) \stackrel{SO(2, R)}{\sim} \eta(t)$.

Definition 3. A function $h : E_2 \rightarrow R$ is called $SO(2, R)$ -invariant on E_2 if $h(Fa) = h(a), \forall a \in E_2, \forall F \in SO(2, R)$.

Let $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in E_2$. The following functions $\langle a, b \rangle = \langle a_1b_1 + a_2b_2 \rangle$ and $[ab] = a_1b_2 - a_2b_1$ are $SO(2, R)$ -invariant functions on E_2 .

Theorem. Let $t_0 \in T$. Assume that T -paths $\gamma(t)$ and $\eta(t)$ in E_2 such that $\gamma(t_0) \neq 0$ and $\eta(t_0) \neq 0$.

(i). Assume that $\gamma(t) \stackrel{SO(2, R)}{\sim} \eta(t)$. Then

(i.1). in the case $T = \{t_0\}$, the following equality holds

$$\langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle = \langle \eta(t_0), \eta(t_0) \rangle. \quad (14)$$

(i.2). in the case $T \neq \{t_0\}$, the following equalities hold

$$\begin{cases} \langle \gamma(t_0), \gamma(t) \rangle = \langle \eta(t_0), \eta(t) \rangle, \forall t \in T; \\ [\gamma(t_0) \gamma(t)] = [\eta(t_0) \eta(t)], \forall t \in T, t \neq t_0 \end{cases} \quad (15)$$

(ii). Conversely, assume that in the cases (i.1) and (i.2) the equalities Eq.(1) and Eq.(2) hold respectively. Then there exists the unique matrix $F \in SO(2, R)$ such that $\eta(t) = F(\gamma(t)), \forall t \in T$. Here F has the following form

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\langle \gamma(t_0), \eta(t_0) \rangle}{\langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle} & \frac{-[\gamma(t_0) \eta(t_0)]}{\langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle} \\ \frac{[\gamma(t_0) \eta(t_0)]}{\langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle} & \frac{\langle \gamma(t_0), \eta(t_0) \rangle}{\langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle} \end{pmatrix}.$$

Similar results have obtained also for the group $O(2, R)$ and other fundamental groups of the Euclidean space E_2 .

Chaotic behavior of the P -adic Potts-Bethe mapping

Khakimov O.N.

Institute of Mathematics, Tashkent

e-mail: hakimovo@mail.ru

The present paper is a continuation of [1], where we have started to investigate chaotic behavior of the Potts-Bethe mapping over the p -adic field $(\mathbb{Q}_p)$. Note that the mapping is governed by

$$f_{\theta,q,k}(x) = \left(\frac{\theta x + q - 1}{x + \theta + q - 2} \right)^k, \quad (1)$$

where $k, q \in \mathbb{N}$ and $|\theta - 1|_p < 1$. In [1] we have considered the case when q is not divisible by p , i.e. $|q|_p = 1$. In that setting, under some conditions we were able to prove that $f_{\theta,q,k}$ is conjugate to the full shift on symbols. In the current paper, we are going to study the same Potts-Bethe mapping when q is divisible by p , i.e. $|q|_p < 1$.

It is easy to notice that the function (1) is defined on $\mathbb{Q}_p \setminus \{x^{(\infty)}\}$, where $x^{(\infty)} = 2 - q - \theta$. For the sake of convenience, we write $Dom(f_{\theta,q,k}) := \mathbb{Q}_p \setminus \{x^{(\infty)}\}$. Let us denote

$$\mathcal{P}_{x^{(\infty)}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_{\theta,q,k}^{-n}(x^{(\infty)}).$$

One can see that the set $\mathcal{P}_{x^{(\infty)}}$ is at most countable, and could be empty for some k, q and θ . Let $x^{(0)}$ be a fixed point of an analytic function f and let $\lambda = \frac{d}{dx}f(x^{(0)})$. The fixed point $x^{(0)}$ is called *attractive* if $0 < |\lambda|_p < 1$, *indifferent* if $|\lambda|_p = 1$, and *repelling* if $|\lambda|_p > 1$. For an attractive point $x^{(0)}$ of the function f , its basin of attraction is defined by

$$A(x^{(0)}) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^{(0)}\},$$

where $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$.

The main result of the present paper is given in the following theorem.

Theorem. Let $p \geq 3$, $k \geq 2$, $|q|_p < 1$, $|\theta - 1|_p < 1$ and $x_0^* = 1$. Then the dynamical structure of the system $(\mathbb{Q}_p, f_{\theta,q,k})$ is described as follows:

- (A) If $|k|_p \leq |q + \theta - 1|_p$ then $Fix(f_{\theta,q,k}) = \{x_0^*\}$ and $A(x_0^*) = Dom(f_{\theta,q,k})$.
- (B) Assume that $|k|_p > |q + \theta - 1|_p$ and $|\theta - 1|_p < |q^2|_p$. Then there exists a non empty set $J_{f_{\theta,q,k}} \subset Dom(f_{\theta,q,k}) \setminus \mathcal{P}_{x^{(\infty)}}$ which is invariant with respect to $f_{\theta,q,k}$ and

$$A(x_0^*) = Dom(f_{\theta,q,k}) \setminus (\mathcal{P}_{x^{(\infty)}} \cup J_{f_{\theta,q,k}}).$$

Moreover, if κ_p is the GCF (greatest common factor) of k and $p - 1$, then the followings hold:

- (B1) if $\kappa_p = 1$ then there exists $x_* \in Fix(f_{\theta,q,k})$ such that $x_* \neq x_0^*$ and $J_{f_{\theta,q,k}} = \{x_*\}$;
- (B2) if $\kappa_p \geq 2$ then $(J_{f_{\theta,q,k}}, f_{\theta,q,k}, |\cdot|_p)$ is topologically conjugate to the full shift dynamics of κ_p symbols.

References

[1]. Mukhamedov F., Khakimov O. Chaotic behavior of the p -adic Potts-Behte mapping. // Disc. and Cont. Dyn. Syst. -2018. V. 38. p.

On linear homeomorphism of spaces of continuous functions on Hattori spaces

Khmyleva T., Sukhacheva E.

Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University

e-mail: tex2150@yandex.ru, sirius9113@mail.ru

The symbol $\mathbb{S}$ is the Sorgenfrey line (also known as the “arrow” or the “left arrow” space), that is, the set of real numbers with the topology generated by the base $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Let $A \subset \mathbb{R}$. The symbol $H(A)$ denotes the topological space in which the base of neighbourhoods of the point x is defined as follows:

$$B_x = \{(x - \varepsilon, x] : \varepsilon > 0\}, \text{ if } x \in \mathbb{R} \setminus A;$$

$$B_x = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}, \text{ if } x \in A.$$

The space $H(A)$ is called the Hattori space and was defined in work Y. Hattori¹. In particular, if $A = \emptyset$, then $H(A) = \mathbb{S}$, if $A = \mathbb{R}$, then $H(A) = \mathbb{R}$.

The question of the homeomorphic classification of the spaces $H(A)$, $H(B)$ and $\mathbb{S}$ was considered in works V.A. Chatyrko, Y. Hattori², J. Kulesza³, A. Bouziad and E. Sukhacheva⁴. In our talk, we will consider the question of the existence of a linear homeomorphism between the spaces of continuous real-valued functions $C_p(H(A))$ and $C_p(H(B))$ for different subsets of the real line A and B .

On max-plus-Milutin spaces

Kholturaev Kh. F.

Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers

e-mail: xolsaid_81@mail.ru

We recall some concepts from [1], and modify them for the max-plus case if necessary. Let X and Y be compact spaces, $f: X \rightarrow Y$ be a map, $f^\circ: C(Y) \rightarrow C(X)$ be the *induced operator* defined by equality $f^\circ(\varphi) = \varphi \circ f$, $\varphi \in C(Y)$. We say that an operator $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ is a *max-plus-linear operator* provided $u(\alpha \odot \varphi \oplus \beta \odot \psi) = \alpha \odot u(\varphi) \oplus \beta \odot u(\psi)$ for every pair of functions $\varphi, \psi \in C(X)$, where $-\infty \leq \alpha, \beta \leq 0$, $\alpha \oplus \beta = 0$. A max-plus-linear operator $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ is *max-plus-regular* provided $\|u\| = \sup\{\|u(\varphi)\| : \varphi \in C(X), \|\varphi\| = 1\}$.

¹Hattori Y. Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces / Memoirs of the Faculty of Science and Engineering Shimane University. Series B. Mathematical Science. – 2010. – Vol. 43. – P. 13–26.

²Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2013. – 54(2). – P. 189–196.

³Kulesza J. Results on spaces between the Sorgenfrey and usual topologies on $\mathbb{R}$ // Topology and its Applications. – 2017. – T. 231. – P. 266–275.

⁴Bouziad A., Sukhacheva E. On Hattori spaces // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2017. – 2. – P. 213–223. DOI 10.14712/1213-7243.2015.199.

$\varphi \in C(X)$, $\|\varphi\| \leq 1\} = 1$ and $u(1_X) = 1_Y$. A max-plus-linear operator $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ is said to be a max-plus-linear *exave* for f provided $f^\circ \circ u$ is the identity on $f^\circ(C(Y))$ or equivalently $f^\circ \circ u \circ f^\circ = f^\circ$. A max-plus-regular *exave* is a max-plus-linear *exave* which is a regular operator. If f is a homeomorphic embedding, then a max-plus-linear *exave* (max-plus-regular *exave*) for f is called max-plus-linear *extension operator* (max-plus-regular *extension operator*). If f is a surjective map, then a max-plus-linear *exave* (max-plus-regular *exave*) for f is called max-plus-linear *averaging operator* (max-plus-regular *averaging operator*).

Remind, in category theory a *monomorphism* (an *epimorphism*) is a left-cancellative (respectively, right-cancellative) morphism, that is, a morphism $f: Z \rightarrow X$ (respectively, $f: X \rightarrow Y$) such that, for each pair of morphisms $g_1, g_2: Y \rightarrow Z$ the following implication holds $f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$ (respectively, $g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2$).

If u is an *exave* for $f: X \rightarrow Y$ and $y \in f(X)$, then for every function $\varphi \in C(Y)$ we have $(u \circ f^\circ)(\varphi)(y) = \varphi(y)$.

Proposition 1[2]. Let $f: X \rightarrow Y$ be a map. A max-plus-regular operator $u: C(X) \rightarrow C(Y)$ is a max-plus-regular extension (respectively, averaging) operator if and only if $f^\circ \circ u = \text{id}_{C(X)}$ (respectively, $u \circ f^\circ = \text{id}_{C(Y)}$).

An epimorphism $f: X \rightarrow Y$ is said to be a max-plus-Milutin epimorphism provided it permits a max-plus-regular averaging operator. A compact space X is a max-plus-Milutin space if there exists a max-plus-Milutin epimorphism $f: D^\tau \rightarrow X$ [1]. Every compactum is a Milutin space [3]. We propose a max-plus version of this result.

Theorem 1. Every compactum is a max-plus-Milutin space.

References

- [1]. Peczynski A., Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions, *Rozprawy Matematyczne*, Warszawa, in series: 58 (1968), pages 89.
- [2]. Zaitov A., On metrisation of the space of idempotent probability measures, arXiv:1905.02466 [math.GN] 7 May 2019.
- [3]. Fedorchuk V., Filippov V., General topology. Basic constructions, Moscow, MSU, 1988, pages 252.

Generalized a-subharmonic functions.

Khursanov Sh.Y.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: shohruhmath@mail.ru

This paper is devoted to the analytical theory the real part of the solution of the well-known Beltrami equation

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

directly related to quasiconformal mappings. Regarding function $A(z)$, generally assumed, what is it measurable and $|A(z)| \leq C < 1$ almost everywhere in the domain $D \subset \mathbb{C}$. In literatures, solutions to equation (1) are called A -analytic functions usually.

In the case when $A(z)$ is anti-analytic in D i.e. $\bar{A} \in O(D)$ then the real part of A -analytic functions satisfies the following equality:

$$\begin{aligned} \Delta_A u := & \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{1-|A|^2} \left[(1+|A|^2) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{1}{1-|A|^2} \left[(1+|A|^2) \frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right] \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Definition 1.[4,5] Twice differentiable function $u \in C^2(G)$, $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ called A -harmonic in G , if it satisfies differential equation (2) in G . The class of A -harmonic functions in the domain D is denoted by $h_A(D)$.

Theorem 1.[4,5] If the function u - A - is harmonic in the set $L(z, R) = \{\xi \in D : |\psi(z, \xi)| < R\} \subset D$, then for any $r < R$ the value and in the center the boundary of the lemniscate is equal to the integral by measure $d\mu = |d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}|$ divided by $2\pi r$ its values on the boundary of the lemniscate $L(z, r)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\psi(z, \xi)|=r} u(\xi) |d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}| \quad (18)$$

where $\psi(z, \xi) = \xi - z + \int_{\gamma(z, \xi)} A(\tau) d\bar{\tau}$.

Definition 2. A function $u : D \rightarrow [-\infty; \infty)$ is called A -subharmonic in the domain D if it satisfies the following two conditions:

1) $u(z)$ upper semicontinuous, i.e. $\forall z_0 \in D$ the following inequality holds:

$$\overline{\lim}_{w \rightarrow z} u(w) \leq u(z)$$

(It follows that the function is bounded above on any compact subset of the domain D);

2) for each point $\forall z_0 \in D$ there exists a number $r(z_0) > 0$ such that for all $r < r(z_0)$ the inequality holds

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\psi(\xi, z_0)|=r} u(\xi) |d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}|$$

The class of A -subharmonic functions in the domain D is denoted by $sh_A(D)$. In what follows, for convenience, we also include the trivial function $u \equiv -\infty$ in $sh_A(D)$.

We will consider the convex region of D .

Lemma: For the function $u \in C^2(D)$, the following equality holds:

$$\begin{aligned} u(z) = & u(z_0) + \frac{1}{1-|A(z_0)|^2} \left[\bar{D}_A f|_{z=z_0} \psi(z_0, z) + D_A f|_{z=z_0} \bar{\psi}(z_0, z) \right] + \\ & + \frac{\left[D_A^2 f - \frac{D_A(1-|A|^2)D_A f}{1-|A|^2} \right]|_{z=z_0} \psi(z_0, z)^2 + \left[\bar{D}_A^2 f - \frac{\bar{D}_A(1-|A|^2)\bar{D}_A f}{1-|A(z_0)|^2} \right]|_{z=z_0} \bar{\psi}(z_0, z)^2}{2(1-|A(z_0)|^2)^2} + \end{aligned}$$

$$+\frac{2}{1-|A(z_0)|^2} \cdot \Delta_A u|_{z=z_0} |\psi(z_0, z)|^2 + o(r^2), \forall z \in L(z_0, r) \quad (19)$$

where $r = |\psi(z_0, z)|$.

Theorem 2. The function $u \in C^2(D)$ is A -subharmonic if and only if $\Delta_A u|_D \geq 0$.

Theorem 3. (analogue of the decomposition Riesz). For any function $u \in sh_A(D)$, not identically equal $-\infty$, in the domain D there exists a Borel measure ν such that for any domain $D_0 \subset\subset D$ equality holds

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_0} \ln |\psi(w, z)| d\nu(w) + h(z), \forall z \in D_0$$

where $h \in h_A(D_0)$.

Theorem 4. If the distribution $\Delta_A u : F(D) \rightarrow \mathbb{R}$ is positive in D , i.e.

$$\Delta_A u(\varphi) := u(\Delta_A \varphi) \geq 0, \forall \varphi \in F(D) \cap \{\varphi \geq 0\},$$

then u identifies with a A -subharmonic function in D :

$$\exists g \in sh_A(D) : u(\varphi) = g(\varphi) := \frac{1}{2i} \iint_D g(z) \varphi(z) dz \wedge d\bar{z}, \forall \varphi \in F(D)$$

where $F(D) = \{\varphi \in C^\infty(D) : \text{supp } \varphi \subset\subset D\}$.

References

- [1]. Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A -analytic functions. Siberian Federal University: Maths and Physics, 2016 9(3). 374-383.
- [2]. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, М. Наука, 1976г.
- [3]. Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения. Palmarium academic publishing. 2012
- [4]. Хурсанов Ш.Я. $A(z)$ -гармонической функции. ВЕСТНИК НУУЗ 2017 2/2 ст. 5-8
- [5]. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У., Ш.Я. Хурсанов, Неравенство Шварца и формула Шварца для A -аналитических функций, Современная математика. Фундаментальные направления. 2018, том 64, №4 с.637-649

On subgroups of the group representation of Cayley tree

Kucharov R.R., Haydarov F.H.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: ramz3364647@yahoo.com, haydarov_imc@mail.ru.

There are urgent open problems of group theory which arise in studying of problems of natural sciences such as physics, mechanics, biology and so on. For instance, configuration of a physical system is defined on the set of vertices of tree can be considered as a function defined on the set of vertices of the tree (see [1], [2], [3]). We can study periodic and weakly periodic Gibbs measures corresponding to an arbitrary subgroup of finite index of group

presentation of Cayley tree. Now we consider the invariance property for subgroups of the group presentations of Cayley tree.

Let G_k be a free product of $k + 1$ cyclic groups of the second order with generators $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, respectively. we study the invariance property for above defined subgroups of the group G_k .

Let (A_1, A_2) be a partition of the set $N_k \setminus A_0$, $0 \leq |A_0| \leq k - 1$, where $N_k = \{1, 2, 3, \dots, k + 1\}$. Put m_j be a minimal element of A_j , $j \in \{1, 2\}$. Then we consider the function $u_{A_1 A_2} : \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\} \rightarrow \{e, a_1, \dots, a_{k+1}\}$ given by

$$u_{A_1 A_2}(x) = \begin{cases} e, & \text{if } x = a_i, i \in N_k \setminus (A_1 \cup A_2) \\ a_{m_j}, & \text{if } x = a_i, i \in A_j, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Let (A_1, A_2) be a partition of the set $N_k \setminus A_0$, $0 \leq |A_0| \leq k - 1$. Then $x \in \mathfrak{S}_{A_1 A_2}^s(G_k)$ if and only if the number $l(u_{A_1 A_2}(x))$ is divisible by $2s + 1$. For any element x of G_k , one denote by $\downarrow x$ if it satisfies the following condition: $x^{-1} \cdot \downarrow x \in \{a_i \mid i \in N_k\}$. The set of all direct successors of x is defined by this formula $S(x) = \{y \in G_k \mid \downarrow y = x\}$.

Now we introduce an equivalence relation on G_k . Namely, elements x and y are called equivalent ($x \sim y$) if it satisfies this condition: $(u_{A_1 A_2}(y))^{-1}(u_{A_1 A_2}(x))$ is divided by $2s + 1$.

Let K_0 be a subgroup of G_k and $G_k/K_0 = \{K_0, K_1, K_2, \dots, K_{2s}\}$, where $K_i, i \in \{0, 1, \dots, 2s\}$ are cosets.

For $i \in \{1, 2, \dots, 2s\}$ we denote

$$S_1(x) = S(x) \cup \{x_\downarrow\}, \quad q_i(x) = |S_1(x) \cap K_i|, \quad Q(x) = (q_0(x), q_1(x), q_2(x), \dots, q_{2s}(x)),$$

and

$$q_i(K_0) = q_i(e) = |\{j : a_j \in K_i\}|, \quad Q(K) = (q_0(K), \dots, q_{n-1}(K)).$$

Theorem 1. Let $K_0 \in \mathfrak{S}_{A_1 A_2}^s(G_k)$, $|A_j| = 1, j \in \{1, 2\}$. For any $x \in G_k$, there exists a permutation π_x of the coordinates of the vector $Q(K_0)$ such that $\pi_x Q(K_0) = Q(x)$.

References

- [1]. E.P. Normatov, U.A. Rozikov: Description of harmonic functions using group representations of the Cayley tree, *Math. Notes*. **79**, (2006), pp. 399-407.
- [2]. J.W. Young: On the partitions of a group and the resulting classification, *Bull. Amer. Math. Soc* **33**, (1927), pp. 453-461.
- [3]. U.A. Rozikov: Gibbs measures on a Cayley tree. *World Sci. Pub, Singapore* (2013).

Local automorphisms simple Leibniz algebras

Kudayberegnov K.K.

Karakalpak State University named after Berdax

e-mail: karim2006@mail.ru

An algebra $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ over a field $\mathbb{F}$ is called a Leibniz algebra if it satisfies the property

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y] \text{ for all } x, y \in \mathcal{L},$$

which is called Leibniz identity.

For a Leibniz algebra $\mathcal{L}$, a subspace generated by squares of its elements $\mathcal{I} = \text{span} \{[x, x] : x \in \mathcal{L}\}$ due to Leibniz identity becomes an ideal, and the quotient $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/\mathcal{I}$ is a Lie algebra called liezation of $\mathcal{L}$. Moreover, $[\mathcal{L}, \mathcal{I}] = 0$. In general, $[\mathcal{I}, \mathcal{L}] \neq 0$. Since we are interested in Leibniz algebras which are not Lie algebras, we will always assume that $\mathcal{I} \neq 0$.

A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called *simple* if its liezation is a simple Lie algebra and the ideal $\mathcal{I}$ is a simple ideal. Equivalently, $\mathcal{L}$ is simple iff $\mathcal{I}$ is the only non-trivial ideal of $\mathcal{L}$.

Theorem 1. *Let $\mathcal{L}$ be a non-Lie simple Leibniz algebra. Then a linear mapping $\Delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ is a local automorphism if and only if Δ is an automorphism.*

References

[1] S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, B.A. Omirov, On nilpotent and simple Leibniz algebras, *Comm. Algebra*, **33** (2005), 159-172.

[2]. J.-L. Loday, Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, *Enseign. Math.*, **19** (1993), 269-293.

About a solvable Leibniz algebra

Malikov N.N.

Namangan State University

e-mail: malikov.nematulla@bk.ru

Definition 1. A vector space with a bilinear bracket $(L, [-, -])$ over a field $\mathbb{F}$ is called a Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ the Leibniz identity

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]].$$

Let $L^{1,\lambda}$ be the algebra which is isomorphic to a naturally graded Leibniz algebra and be its multiplication table in the following case[2]:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_n, \\ [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, & \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Where $e_1, \dots, e_n$ is a basis of the algebra $L^{1,\lambda}$. We consider classification of the algebra $R = L^{1,\lambda} + Q$ with $\dim Q = 1$. Let x be a basis of Q .

Proposition 1. Any derivation of Leibniz algebra $L^{1,\lambda}$ has the following form:

$$\begin{aligned} d(e_1) &= \sum_{i=1}^n \alpha_{1,i} e_i, & d(e_2) &= 2\alpha_{1,1} e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \alpha_{1,i-1} e_i + (1 + \lambda) \alpha_{1,n-1} e_n, \\ d(e_i) &= i\alpha_{1,1} e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} \alpha_{1,j-i+1} e_j, & 3 \leq i &\leq n-2, \end{aligned}$$

$$d(e_{n-1}) = \sum_{i=n-3}^n \alpha_{2,i} e_i, \quad d(e_n) = \alpha_{2,n-3} e_{n-2} + (\alpha_{2,n-1} + \alpha_{1,1}) e_n.$$

Theorem 1. Let R be a solvable Leibniz algebra whose nilradical is $L^{1,\lambda}$. Then there exists a basis $\{e_1, \dots, e_n, x\}$ of the algebra R such that the multiplication table of R with respect to this basis has the following form:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-3, & [e_{n-1}, e_1] = e_n, & [e_1, e_{n-1}] = \lambda e_n, \\ [x, e_1] = -e_1, & [e_i, x] = i e_i, & 1 \leq i \leq n-2, \\ [e_{n-1}, x] = \alpha_{2,n-2} e_{n-2} + \lambda e_{n-1}, & [e_n, x] = (1 + \lambda) e_n, \\ [x, e_{n-1}] = \frac{\lambda \alpha_{2,n-2}}{n-2-\lambda} e_{n-2} - \lambda e_{n-1}, & \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq n-2, \end{cases}$$

References

- [1]. Cabezas J.M., Camacho L.M., Rodríguez I.M. On filiform and 2-filiform Leibniz algebras of maximum length, Journal of Lie Theory, vol. 18, 2008, p. 335-350.
- [2]. Camacho L.M., Gómez J.R., González A.J., Omirov B. A. Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras, Journal of Symbolic Computation, vol. 44, 2009, p. 527-539.

The functional tightness of the space of probability measures of finite support

Mamadaliev N.K., Badrutdinova R.Z.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: nodir_88@bk.ru, rezidazq@mail.ru

Let X be a compact space. By $C(X)$ denote the set of all continuous maps $\varphi : X \rightarrow R$ with the usual sup-norm $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. A continuous functional $\mu : C(X) \rightarrow R$ is called a measure on the compact X . A measure is positive (notation $\mu 0$), if $\mu(\varphi) 0$ for any $\varphi 0$. A measure is normed, if $\|\mu\| = 1$. A positive normed measure is called a probability measure. A space consisting of all probability measures, denote by $P(X)$. A neighborhood base at a point $\mu \in P(X)$ consists of all the sets in the form

$$O(\mu, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\nu \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, k\}$$

where $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in C(X)$ and $\varepsilon > 0$.

A support $\text{supp}(\mu)$ of a measure $\mu \in C(X)$ is the smallest closed subset $F \subset X$ such that $\mu(F) = \mu(X)$. For a compact X and a natural number n put [1]

$$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp}(\mu)| \leq n\}.$$

Definition 1.1.[2] Let κ be an infinite cardinal, X and Y topological spaces. A function $\phi : X \rightarrow Y$ is said to be κ -continuous if for every subspace A of X such that $|A| \leq \kappa$, the restriction $\phi|_A$ is continuous.

A function $\phi : X \rightarrow Y$ is said to be *strictly* κ -continuous if for every subspace A of X such that $|A| \leq \kappa$, the restriction of ϕ to A coincides with the restriction to A of some continuous function $f : X \rightarrow Y$.

Definition 1.2. [2] The *functional tightness* of a space X is

$t_0(X) = \min\{\kappa: \kappa \text{ is an infinite cardinal and every } \kappa\text{-continuous real-valued function on } X \text{ is continuous}\}.$

Theorem 1.1. For any compact space X we have $t_0(X) = t_0(P_n(X))$.

References

- [1]. V.V. Fedorchuk, V.V. Filippov, General topology, Fizmatlit, Moscow, 2006, 332 pp.
- [2]. A.V. Arhangelskii, Functional tightness, Q-spaces and τ -embeddings, Comment. Math. Univ. Carol. 24 (55) (1983) 105-119.

Deformation space of cubic parabolic Newton maps

Khudoyor Mamayusupov

*National Research University Higher School of Economics, Faculty of Mathematics,
Usacheva 6, Moscow, Russia
e-mail: kmamayusupov@hse.ru*

1. Introduction. Consider the family $\mathcal{F}$ of cubic rational functions with superattracting fixed points at 0 and ∞ and a parabolic fixed point at 1, and we study them as dynamical systems on the Riemann sphere $\hat{\mathbb{C}}$. We call them cubic parabolic Newton maps as they are obtained (Moebius conjugate) by applying the Newton's method to $p(z)e^{q(z)}$ for a quadratic p with distinct roots and a linear q . Every map in $\mathcal{F}$ has the form $f_a(z) = z^2 \frac{z + a - 1}{(a + 1)z - 1}$ for $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, thus the family $\mathcal{F}$ is a one-complex parameter family. These maps have 4 critical points, the two of which are fixed and the third converges to 1 under the iterates of f_a . The last critical point can have a free dynamics and is called a free critical point. We consider parameters $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ such that the free critical point of f_a belongs to basins of attracting cycles or the parabolic basin of 1, and call *stable* such an f_a . Stable parameters form an open set in the a -parameter plane and the connected components are called *stable components*. For the main parabolic stable component H characterized by functions f_a for which the free critical point belongs to the immediate basin of 1, we consider quasiconformal conjugacy classes—the deformation space of f_a in H and show that if there is no critical orbit relation then any two such maps are globally conjugate and belong to the single conjugacy class. If there is a critical orbit relation for f_a then the deformation space of f_a consists of the single f_a .

2. Results. The moduli space of $\mathcal{F}$ is double covered by the a -parameter plane $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, with an orbifold structure with a singular boundary locus $\{0, \infty\}$, both points are of an elliptic type.

Denote $\mathcal{B}_3$ the model space consisting of cubic parabolic Blaschke products B such that $B(1) = 1$, $B'(1) = 1$, $B''(1) = 0$, and with critical point at 0. Every such a Blaschke product has a normal form $B(z) = \beta_a(z^2 \cdot \beta_b(z))$ for $b \in \mathbb{D}$, where $a = \frac{(1-\bar{b})(3(1-b)+b(1-\bar{b}))}{(1-b)(-6+3b+8\bar{b}-3|b|^2-\bar{b}^2(3-b))}$. The model space $\mathcal{B}_3$ is parametrized by a complex number $b \in \mathbb{D}$ (real 2 dimensional) and the dependence is real analytic. In particular, the other critical point w of a Blaschke product is given by $w = \frac{b}{4|b|^2} \left(3 + |b|^2 - \sqrt{(3 + |b|^2)^2 - 16|b|^2} \right)$ depending real analytically on $b \in \mathbb{D}$. The location of the critical point w also parametrizes

$\mathcal{B}_3$, which is complex analytic. Let $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{B}_3)$ denote the moduli space of $\mathcal{B}_3$ consisting of conformal conjugacy classes of maps in $\mathcal{B}_3$.

For every cubic Newton map $f_a \in H$ corresponds a conformal class in the moduli space $\mathcal{M}$, and thus H can be identified with $\mathcal{M}$, which is a topological open disk.

Theorem 1. The moduli space $\mathcal{M}$ of the model space $\mathcal{B}_3$ is an orbifold $\mathbb{D}/\Gamma$, a topological open disk, with an elliptic point of order 2 at the origin and a group action is by $\Gamma = \{\text{id}, z \mapsto -z \frac{1-\bar{z}}{1-z}\}$ for $z \in \mathbb{D}$. The action is conjugate to the action by $z \mapsto -z$, the group $\mathbb{Z}_2$.

Theorem 2. The main parabolic stable component H is simply connected with its unique center. The quasiconformal conjugacy classes of maps in H are of two types: type-I, a single class, which is topologically an infinitely punctured disk, and its punctures are of type-II. The set of type-II quasiconformal conjugacy classes is in one-to-one correspondence with the set of all cubic postcritically non-minimal Newton maps. Moreover, the boundary ∂H is a Jordan curve.

The main result in summary is the following.

Theorem 3. Every stable component of the parameter plane of $\mathcal{F}$ is an open topological 2-cell with its unique center that is a cubic postcritically minimal Newton map. There exists a bijective function from the space of Haoissinsky equivalent classes of centers (hyperbolic postcritically finite maps) of hyperbolic components of the space of standard cubic Newton maps of cubic polynomials to the centers of stable components of this space of parabolic cubic Newton maps. This bijection preserves the dynamics on the corresponding Julia sets and is obtained by the parabolic surgery.

The psuedo weight and the π -weight of Hattori spaces

Meyliev Sh., Mukhamadiev F.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

Let us recall that the Sorgenfrey line $(\mathbb{R}, \tau_S)$ is the set $\mathbb{R}$ of real numbers with the lower limit topology τ_S (the family of all half-open intervals $[a, b)$, where $a < b$, is a base of the topology on $\mathbb{R}$). The space $(\mathbb{R}, \tau_S)$ is an important example of topological spaces [1].

In [2] Hattori introduced a family $\mathcal{G} = \{\tau(A) : A \subseteq \mathbb{R}\}$ of topologies on $\mathbb{R}$ such that $\tau(\mathbb{R}) = \tau_E$ (the Euclidean topology on $\mathbb{R}$) and $\tau(\emptyset) = \tau_S$. The topology $\tau(A)$ on $\mathbb{R}$ is defined as follows.

- (1) For each $x \in A$, $\{(x - \epsilon, x + \epsilon) : \epsilon > 0\}$ is the neighborhood base at x , and
- (2) for each $x \in \mathbb{R} \setminus A$, $\{[x, x + \epsilon) : \epsilon > 0\}$ is the neighborhood base at x .

It is easy to see that for any $A, B \subseteq \mathbb{R}$ we have $A \supseteq B$ iff $\tau(A) \subseteq \tau(B)$. In particular, $\tau_E \subseteq \tau(A) \subseteq \tau_S$ for each $A \subseteq \mathbb{R}$.

The spaces $(\mathbb{R}, \tau(A))$, $A \subseteq \mathbb{R}$, possess several nice topological properties (see [3]). In this note we will call the spaces $(\mathbb{R}, \tau(A))$, $A \subseteq \mathbb{R}$, *Hattori spaces*.

$\beta \subset \tau(X)$ is a pseudo base of X if for every $p \in X$ we have $\{p\} = \{B \in \beta : p \in B\}$. Clearly X has a pseudo base if and only if $X \in T_1$. Thus in the following definition $X \in T_1$. $\psi w(X)$ is called the pseudo weight of X .

$$\psi w(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ is a pseudo base of } X\} + \aleph_0.$$

$\beta \subset \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ is said to be a π -base of X if for every nonempty open set G there is a $B \in \beta$ with $B \subset G$.

$$\pi(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ is a } \pi\text{-base of } X\} + \aleph_0.$$

$\pi(X)$ is called the π -weight of X [4].

Proposition. For any subset $A \subseteq \mathbb{R}$ we have

$$1) \psi w(\mathbb{R}, \tau(A)) = \aleph_0;$$

$$2) \pi(\mathbb{R}, \tau(A)) = \aleph_0.$$

References

- [1]. R. Engelking, General topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [2]. Y. Hattori, Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces, Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci. 43 (2010), 13-26.
- [3]. V. A. Chatyrko, Y. Hattori, A poset of topologies on the set of real numbers, Comment. Math. Univ. Carolin., 54, 2 (2013) 189-196.
- [4]. I. Juhasz, Cardinal functions in topology - ten years later // MATHEMATICAL CENTRE TRACTS 123, Amsterdam 1980, p.160.

The pseudo weight and the π -weight of φ_τ -superkernel topological spaces

Mukhamadiev F.G.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: farhod8717@mail.ru

A system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called *linked* if any two elements from ξ intersect. Any linked system can be extended to a maximal linked system (MLS), but this extension is, as a rule, not unique [1].

Proposition. [1]. *A linked system ξ of a space X is a MLS iff it possesses the following completeness property:*

if a closed set $A \subset X$ intersects with any element from ξ , then $A \in \xi$.

Denote by λX the set of all MLS of the space X . For a closed set $A \subset X$, put

$$A^+ = \{\xi \in \lambda X : A \in \xi\}.$$

For an open set $U \subset X$, set

$$O(U) = \{\xi \in \lambda X : \text{there is an } F \in \xi \text{ such that } F \subset U\}.$$

The family of subsets in the form of $O(U)$ covers the set λX ($O(X) = \lambda X$), that's why it forms an open subbase of the topology on λX . The set λX equipped with this topology is called *the superextension* of X .

Definition. Let X be an infinity T_1 -space, φ be a cardinal function and τ be an arbitrary cardinal number. We call an φ_τ -superkernel of a topological space X the space

$$\lambda_\tau^\varphi X = \{\xi \in \lambda X : \exists F \in \xi : \varphi(F) \leq \tau\}.$$

$\beta \subset \tau(X)$ is a pseudo base of X if for every $p \in X$ we have $\{p\} = \{B \in \beta : p \in B\}$. Clearly X has a pseudo base if and only if $X \in T_1$. Thus in the following definition $X \in T_1$. $\psi w(X)$ is called the pseudo weight of X .

$$\psi w(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ is a pseudo base of } X\} + \aleph_0.$$

$\beta \subset \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ is said to be a π -base of X if for every nonempty open set G there is a $B \in \beta$ with $B \subset G$.

$$\pi(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ is a } \pi\text{-base of } X\} + \aleph_0.$$

$\pi(X)$ is called the π -weight of X [2].

Theorem. Let X be an infinity T_1 -space and $\varphi = d, \tau = \aleph_0$. Then:

- 1) $\psi w(\lambda_\tau^\varphi X) = \psi w(X)$;
- 2) $\pi(\lambda_\tau^\varphi X) = \pi(X)$.

References

- [1]. V.V.Fedorchuk, V.V.Filippov, General Topology. Basic Constructions. Fizmatlit, Moscow. 2006.
- [2]. I.Juhász, Cardinal functions in topology - ten years later // MATHEMATICAL CENTRE TRACTS 123, Amsterdam 1980, p.160.

Systems of matrix differential equations for $SO(n, p, \mathbb{C})$ - equivalent surfaces

Muminov K.K., Gafforov R.A.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

e-mail: m.muminov@rambler.ru, gafforov.rahmatjon@mail.ru

Let $O(n, p, \mathbb{C})$ be a pseudo-orthogonal subgroup in group $GL(n, \mathbb{C})$, i.e. $O(n, p, \mathbb{C}) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) : g^T e_p g = e_p\}$, where $e_p = (e_{ij}^p)_{i,j=1}^n$ is $n \times n$ -matrix such that $e_{ii}^p = 1$ if $i = 1, \dots, p$, $e_{ii}^p = -1$ if $i = p+1, \dots, n$, $e_{ij}^p = 0$ if $i \neq j$, where $p \in 1, \dots, n-1$. By $SO(n, p, \mathbb{C}) = \{g \in O(n, p, \mathbb{C}) : \det(g) = 1\}$ we denote a special pseudo-orthogonal subgroup of $GL(n, \mathbb{C})$. Consider the following system of matrix differential equations

$$\begin{cases} X'_s(s, t) = X(s, t)A(s, t) \\ X'_t(s, t) = X(s, t)B(s, t), \end{cases} \quad (1)$$

where $X(s, t)$ is the unknown $n \times n$ matrix, $A(s, t)$, $B(s, t)$ are given fixed $n \times n$ matrices, $s, t \in (0, 1)$.

Solution $X(s, t)$ of system (1) is called nondegenerate if $\det(X(s, t)) \neq 0$ for all $s, t \in (0, 1)$. Two solutions $X_0(s, t)$ and $X_1(s, t)$ are called $SO(n, p, \mathbb{C})$ -equivalent, if $X_0(s, t) = gX_1(s, t)$ for some $g \in SO(n, p, \mathbb{C})$. Together with system (1) we also consider

the following system of equations $\begin{cases} X^T(s, t)e_p X(s, t) = C(s, t) \\ \det(X(s, t)) = d(s, t), \end{cases}$ where $C(s, t) = C^T(s, t)$

and $c_{ij}(s, t)$, $d(s, t)$ are C^∞ -differentiable functions, $d(s, t) \neq 0$ for all $s, t \in (0, 1)$.

Theorem 1. Let nondegenerate matrices $A(s, t)$, $B(s, t)$, $C(s, t)$ satisfies the following

conditions: (i). $A(s, t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n}(s, t) \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2n}(s, t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{nn}(s, t) \end{pmatrix}$; (ii). $A_t + BA = B_s + AB$;

(iii). $C_s = A^T C + C A$; (iv). $C_t = B^T C + C B$; (v). $d'_s = a_{nn} d$; (vi). $d'_t = (b_{11} + b_{22} + \dots + b_{nn}) d$; (vii). $d^2(s, t) = \det(C(s, t))$. Then the system of equations

$$\begin{cases} X'_s = X A \\ X'_t = X B \\ X^T e_p X = C \\ \det(X) = d \end{cases} \quad (2)$$

has a nondegenerate solution. In addition, the solution of system (2) is unique with respect to action of the group $SO(n, p, \mathbb{C})$.

For each surface $\vec{x}(s, t) = (x_j(s, t))_{j=1}^n$ we consider $n \times n$ matrix $M_s(\vec{x}) = (x'_s \dots x_s^{(n-1)})$ and put $M'_{ss}(\vec{x}) = (x'_s x''_s \dots x_s^{(n)})$, $M'_{st}(\vec{x}) = (x'_t x''_{st} \dots x_{s^{n-1}t}^{(n)})$. The surface $\vec{x}(s, t)$ is called regular if $\det(M_s(\vec{x}(s, t))) \neq 0$ for all $s, t \in (0, 1)$.

Theorem 2. Let the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then

- (i). For any nondegenerate solution $X(s, t) = (x_{ij}(s, t))_{i,j=1}^n$ of a system (2) there exists a regular surface $\vec{x}(s, t)$, $s, t \in (0, 1)$ such that $M_s(\vec{x}(s, t)) = X(s, t)$ for all $s, t \in (0, 1)$;
- (ii). There exists a unique regular surface $\vec{x}(s, t)$ up to $SO(n, p, \mathbb{C})$ -equivalence such that the matrix $M_s(\vec{x}(s, t))$ is a nondegenerate solution of system (2).

On new classes of two-dimensional chains of evolution algebras

Murodov Sh.N.

Bukhara state medical institute named after Abu Ali ibn Sino

e-mail: murodovs@yandex.ru

In the 1920s and 1930s a new object - general genetic algebra was introduced to mathematics, which was the product of interactions between Mendelian genetics and mathematics. There exist several classes of non-associative algebras (baric, evolution, stochastic, etc.), whose investigation has provided a number of significant contributions to theoretical population genetics. Such classes have been defined different times by several authors, and all algebras belonging to these classes are generally called "genetic".

In the present day, Non-Mendelian genetics is a basic language of molecular geneticists. Naturally, the question arises: what new subject non-Mendelian genetics offers to mathematics? What mathematics offers to understanding of non-Mendelian genetics? The systematic formulation of reproduction in non-Mendelian genetics as multiplication in algebras was introduced in [7] and called as "evolution algebras". These are algebras in which the multiplication tables are motivated by evolution laws of genetics.

The foundation of evolution algebra theory and applications in non-Mendelian genetics and Markov chains are developed by Tian in [6]. Evolution algebras associated to function spaces defined by graphs, state spaces, and Gibbs measures are studied in [4].

A notion of chain of evolution algebras was introduced in [1], where the sequence of matrices of structural constants of the chain of evolution algebras satisfies an analogue of the Chapman-Kolmogorov equation.

In [2,3] we studied the classification dynamics of known two-dimensional chains of evolution algebras constructed in [5] and showed that known chains of evolution algebras

never contain evolution algebra isomorphic to E_4 in any time s, t . In this paper we will construct CEAs, which will contain the algebra E_4 for some period of time.

References

- [1]. Casas, J.M., Ladra, M., Rozikov, U.A. A chain of evolution algebras. *Linear Algebra Appl.* **435** (2011), no. 4, 852–870.
- [2]. Murodov, Sh.N. Classification dynamics of two-dimensional chains of evolution algebras. *Internat. J. Math.* **25** (2014), no. 2, 1450012, 23 pp.
- [3]. Murodov, Sh.N. Classification of two-dimensional real evolution algebras and dynamics of some two-dimensional chains of evolution algebras. *Uzbek. Mat. Zh.* (2014), no. 2, 102–111.
- [4]. Rozikov, U.A., Tian J.P. Evolution algebras generated by Gibbs measures. *Lobachevskii J. Math.* **32** (2011), no. 4, 270–277.
- [5]. Rozikov, U. A., Murodov, Sh.N. Dynamics of two-dimensional evolution algebras. *Lobachevskii J. Math.* **34** (2013), no. 4, 344–358.
- [6]. Tian, J.P. *Evolution algebras and their applications*. Lecture Notes in Mathematics 1921, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [7]. Tian, J.P., Vojtechovsky, P. Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics. *Quasigroups Related Systems* **14** (2006), 111–122.

On the group of diffeomorphisms of foliated manifolds

A.Narmanov

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

The set $Diff(M)$ of all diffeomorphisms of manifold M onto itself is the group related to composition and inverse mapping. The diffeomorphism groups of smooth manifolds are of great importance in differential geometry and in analysis. The fundamental works in this area are the studies of V.I. Arnold, H. Omori, A. M. Lukatsky [?], [?], [?], [?]. Intensive development of the theory of groups of diffeomorphisms began after the work of V.I. Arnold, in which it was shown that the motions of an ideal incompressible fluid are geodesic on a group of diffeomorphisms that preserve volume element.

When M is a finite dimensional manifold in 1939 was proven that the group of isometries $I(M)$ of riemannian manifold M is Lie group [?].

H. Omori defined the differential structure on group of diffeomorphisms compact manifold which is weaker than that structure of Lie group in the classical sense. This differentiable structure is called ILH (inverse limit of Hilbert) Lie group. H. Omori showed that ILH - Lie group of diffeomorphisms acting on compact manifold transitively and primitively can only be the following: the whole group of diffeomorphisms, the group of diffeomorphisms preserving the volume element, the group of symplectic diffeomorphisms, the group of contact diffeomorphisms. The questions of finite generation of diffeomorphism groups and curvature properties of ILH - Lie groups of diffeomorphisms are investigated by A. M. Lukatsky [?], [?].

In this paper we investigate some subgroups of the group $Diff_F(M)$. It is known that the group $Diff(M)$ is topological group in compact open topology.

We will denote by (M, F) manifold M with k -dimensional foliation F on M . Let $L(p)$ be a leaf of the foliation F passing through point p , $T_p F$ – the tangent space to the leaf $L(p)$ at p . We get subbundle (smooth distribution) $TF = \{T_p F : p \in M\}$ of the tangent bundle TM of the manifold M .

Let us denote by $V(M), V(F)$ the set of smooth sections of bundles TM, TF respectively.

Definition-2. If for the some C^r -diffeomorphism $\varphi : M \rightarrow M$ the image $\varphi(L_\alpha)$ of any leaf L_α of foliation F is a leaf of foliation F , we say that the φ is C^r -diffeomorphism of foliated manifold and write as $\varphi : (M, F) \rightarrow (M, F)$.

Example 1. Let $M = R^2(x, y)$ – Euclidean plane with the Cartesian coordinates (x, y) . Leaves L_α of foliation F are given by the equations $x^2 - y = \alpha = \text{const}$. Then the plan diffeomorphism $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ determined by the formula

$$\varphi(x, y) = (x, y + \lambda f(x, y))$$

is diffeomorphism of foliated plane (R^2, F) , for every $\lambda \in R$, such that $\lambda \neq 1$, where $f(x, y) = x^2 - y$. It sends a leaf L_α to $L_{(1-\lambda)\alpha}$. It is easy to check that in fact $\varphi : R^2 \rightarrow R^2$ is an isometry of foliated plane (R^2, F) .

Recall a vector field X is called a foliated field if for every vector field Y , tangent to F , Lie bracket $[X, Y]$ also is tangent to F . It is known that flow of every foliated field consists of diffeomorphisms of foliated manifold (M, F) .

Let's denote as $Diff_F(M)$ – the set of all C^r diffeomorphisms of foliated manifold (M, F) , where $r \geq 0$. The group $Diff_F(M)$ is subgroup of $Diff(M)$ and therefore it is topological group in compact open topology.

Theorem-1. Let (M, F) is foliated manifold where M is a smooth connected finite-dimensional manifold. Then the group $Diff_F(M)$ is a closed subgroup of $Diff(M)$ in compact open topology.

The closedness of the set $Diff_F(M)$ allows us to state the following corollary [?], p.30].

Corollary. Factor space $Diff(M)/Diff_F(M)$ is regular homogeneous topological space.

We will introduce some topology on the group $Diff_F(M)$, which depends on foliation F and coincides with compact open topology when F is n -dimensional foliation.

Let $\{K_\lambda\}$ be a family of all compact sets where each K_λ is a subset of some leaf of foliation F and let $\{U_\beta\}$ – family of all open sets on M . We consider for each pair K_λ and U_β set of all mappings $f \in G_F^r(M)$, for which $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. This set of mappings we denote through $[K_\lambda, U_\beta] = \{f : M \rightarrow M | f(K_\lambda) \subset U_\beta\}$.

It isn't difficult to show that every possible finite intersections of sets of the form $[K_\lambda, U_\beta]$ forms a base for some topology. This topology we call foliated compact open topology or in brief F -compact open topology.

Let M be a smooth connected finite-dimensional Riemannian manifold.

Definition-3. An isometry $\varphi : M \rightarrow M$ is called an isometry of foliated manifold (M, F) if it is diffeomorphism of foliated manifold (M, F) ,

Let us recall that vector field X on riemannian manifold (M, g) is called Killing field if its flow consists of isometries of Riemannian manifold (M, g) , that is $L_X g = 0$, where g is riemannian metric, $L_X g$ denotes Lie derivative of the metric g with respect to X . If X is foliated Killing vector field, it's flow consists of isometries of foliated manifold (M, F) .

We will denote by $Iso_F(M)$ the set of all C^r -isometries of foliated manifold (M, F) , where $r \geq 0$. We have that $Iso_F(M) = Diff_F(M) \cap Iso(M)$.

Theorem-2. Let (M, F) is foliated manifold where M is a smooth connected finite-dimensional complete Riemannian manifold. Then the group $Iso_F(M)$ is a topological group with F - compact open topology.

Let's denote as $Diff_F^0(M)$ set of all C^r diffeomorphisms $g \in Diff_F(M)$ of foliated manifold (M, F) , such that $g(L_\alpha) = L_\alpha$ for every L_α leaf of foliation F . Flow of every tangent vector field consists of diffeomorphisms of foliated manifold (M, F) , which belong to the group $Diff_F^0(M)$. It can be proven following theorem.

Theorem-3 . Let (M, F) - foliated manifold where M — is a smooth, connected and finite-dimensional manifold. Then the group $Diff_F^0(M)$ is a topological group with F - compact open topology.

Theorem-4 . Let all leaves of foliated manifold (M, F) are closed subsets of M . Then the group $Diff_F^0(M)$ is closed subset of $Diff_F(M)$ in F - compact open topology.

It is known that limit of isometries is an isometry. By using this fact and arguments of theorem-1 it is not difficult to prove following theorem.

Theorem-5 . Let (M, F) is foliated manifold where M is a smooth connected finite-dimensional complete Riemannian manifold. Then the group $Iso_F(M)$ is closed subset of $Diff_F(M)$ in F - compact open topology.

References

- [1]. V. Arnold. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier. 1966.-16, №1.C.319-361.
- [2]. C. Chevalley. Theory of Lie groups I. Princeton University press.1946.
- [3]. A. M. Lukatsky. Finite generation of groups of diffeomorphisms. Russian Mathematical Surveys(1978),33(1):207
- [4]. A. M. Lukatsky. Investigation of the geodesic flow on an infinite-dimensional Lie group by means of the coadjoint action operator. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.2009, Volume 267, Issue 1, pp 195–204.
- [5]. S. B. Myers and N. E. Steenrod. The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. Annals of Mathematics Second Series, Vol. 40, No. 2 (Apr., 1939), pp. 400-416
- [6]. H. Omori. Group of diffeomorphisms and thier subgroups// Trans. Amer. Math.Soc.1973.179.C.85-122.

A description of the group of all form-preserving transformations of the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 - 2x_2y_2$ over the field of rational numbers

Erkin Rahmonov, Djavvat KHADJIEV

National University of Uzbekistan, 100174 Tashkent, Uzbekistan

Let P^2 be the 2-dimensional vector space over the field P of rational numbers and $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in P^2$. Consider on P^2 the following bilinear form $\varphi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$. A linear mapping $F : P^2 \rightarrow P^2$ will be called φ -orthogonal if $\varphi(F(x), F(y)) = \varphi(x, y)$ for all $x, y \in P^2$. Denote by $O(2, P)$ the group of all φ -orthogonal transformations of P^2 .

Proposition.. Every φ -orthogonal transformation of P^2 is linear.

Let $C \in O(2, P)$. Then $\det(C) = 1$ or $\det(C) = -1$. Denote by $SO(2, P)$ the set $\{C \in O(2, P) : \det(C) = 1\}$. $SO(2, P)$ is a subgroup of $O(2, P)$. Put $W = \|w_{ij}\|_{i,j=1,2}$, where $w_{11} = 1, w_{12} = w_{21} = 0, w_{22} = -1$. The equality $O(2, P) = SO(2, P) \cup \{CW \mid C \in SO(2, P)\}$ holds, where CW is the multiplication of matrices C and W .

For $x = (x_1, x_2) \in P^2$, denote by $V(x_1, x_2)$ the matrix of the form $\begin{pmatrix} x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$. Denote by $SV(P)$ the set of all matrices $V(x_1, x_2)$ such that $\det(V(x_1, x_2)) = x_1^2 - 2x_2^2 = 1$.

Theorem 1.. The equality $SO(2, P) = SV(P)$ holds.

A description of the set $SV(P)$ as follows **Theorem2..**

- (1) . There is not exists an element $x = (x_1, x_2) \in P^2$ such that $x_1 = 0$ and $V(x_1, x_2) \in SV(P)$. There exist only two elements $(x_1, x_2) \in P^2$ such that $x_2 = 0$ and $V(x_1, x_2) \in SV(P)$. They are $(1, 0)$ and $(-1, 0)$.
- (2) . Assume that $x = (x_1, x_2) \in P^2$ such that $x_2 \neq 0$ and $V(x_1, x_2) \in SV(P)$. Then the following equalities

$$x_1 = \frac{2 + k^2}{2 - k^2}, x_2 = \frac{2k}{2 - k^2}, \quad (20)$$

hold for some $k \in P$, where $k \neq 0$. Conversely, assume that k is an arbitrary nonzero element of P and $x = (x_1, x_2) \in P^2$ such that x_1 and x_2 have the form $Eq.(1)$. Then $V(x) \in SV(P)$.

Theorems 1, 2 and the equality $O(2, P) = SO(2, P) \cup \{CW \mid C \in SO(2, P)\}$ imply a description of the group $O(2, P)$.

Geometry of orbits of conformal vector fields

Rajabov E.O.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: rajabov_2019@bk.ru

Let M — be a smooth Riemannian manifold of dimension n with the metric tensor g , and D is the family of smooth vector fields defined on the manifold M . The family D can contain a finite and infinite number of smooth vector fields.

Let $X \in D$ is a smooth vector field on the manifold M . For a point $p \in M$, by $t \rightarrow X^t(p)$ we denote integral curve of the vector field X passing through the point p for $t = 0$. The map $t \rightarrow X^t(p)$ is defined in certain region $I(p)$, which, in general, depends not only on the field X , but also on the starting point p . Further, in formulas of the form $X^t(p)$ we assume that $t \in I(p)$.

Definition 1. The orbit $L(p)$ of the family D vector fields passing through the point p from M , is defined as the set of points q from M for which there are real numbers $t_1, t_2, \dots, t_k$ and the vector fields $X_1, X_2, \dots, X_k$ from D (where k is an arbitrary positive integer) such that

$$q = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(p))\dots)) \quad (21)$$

If D consists of one vector field X , the orbit is a integral curve (one-dimensional manifold) of vector field X .

It is known that the partition of a manifold into orbits is a singular foliation [3]. If the dimensions of all the orbits are the same, then this partition is a regular foliation.

In this paper, we study the geometry of the orbits of some conformal vector fields. It is said that a vector field X on M is conformal if $L_X g = \sigma g$, where σ is a function on M , $L_X g$ – is the Lie derivative. It is known that a vector field X on M is conformal if and only if the local one-parameter group of local transformations generated by the vector field X , consists of conformal transformations.

The geometry of conformal vector fields has been the subject of numerous studies [1], [2], [4].

$D = \{X_1, X_2\}$ be a family of smooth vector fields in R^3 , where

$$X_1 = \{x, y, z\}, \quad (22)$$

$$X_2 = \{-y + \alpha x, x + \alpha y, \alpha z\}, \quad (23)$$

α – is a real number.

We study the geometry of the orbits of these vector fields.

Theorem 1. The orbits of the family of D vector fields generate a singular foliation whose leaves are surfaces of zero curvature.

Theorem 2. The orbits of the family D vector fields on the manifold M generate a two-dimensional foliation whose leaves are surfaces of zero curvature.

References

- [1]. Blair D.E. On the zeros of a conformal vector field // Nagoya Mathematical Journal .V. 55 (1974), 1 - 3.
- [2]. Obata M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1971. V. 6, No 2. P. 247 - 258.
- [3]. Sussman H. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions // Transactions of the AMS. 1973. V. 180. No 6. P. 171 - 188.
- [4]. A. Ya. Narmanov and S. S. Saitova. On the Geometry of Orbits of Killing Vector Fields // Differential Equations, 2014, Vol. 50, No. 12, pp. 1 - 8.

On the properties of the solution of filtration system coupled via nonlinear boundary flux

Rakhmonov Z.R., Mukhammadiev Sh.J.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: zraxmonov@inbox.ru

In this thesis, we studied the qualitative properties of solutions of the following doubly degenerate parabolic equations

$$\begin{cases} u_t = \nabla (|\nabla u|^{p_1-2} \nabla u), & (x, t) \in R_+^N(0, +\infty), \\ v_t = \nabla (|\nabla v|^{p_2-2} \nabla v), & (x, t) \in R_+^N(0, +\infty), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -|\nabla u|^{p_1-2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, t) = v^{q_1}(0, t), & t > 0, \\ -|\nabla v|^{p_2-2} \frac{\partial v}{\partial x_1}(0, t) = u^{q_2}(0, t), & t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R_+^N, \quad (3)$$

where $R_+^N = \{(x_1, x') \mid x' \in R_+^{N-1}, x_1 > 0\}$, $p_i > 2$, $q_i > 0$ ($i = 1, 2$), u_0 and $v_0(x)$ are nonnegative continuous functions with compact support in R_+^N .

Nonlinear parabolic equations (1) appear in population dynamics, chemical reactions, heat transfer, polytropic filtration and so on. In particular, system (1) may be used to describe the densities of two biological populations during a migration, the thickness of two kinds of chemical reactants in a chemical reaction, or the temperatures of two kinds of porous materials during a propagation.

The problems on blow-up and global existence conditions, blow-up rates to nonlinear systems have been intensively studied (see [2-4] and references therein). In particular, the critical Fujita exponents and the critical global exponents are very interesting for various physical and chemical nonlinear problems [1].

This work is devoted to the study of the conditions of global solvability and unsolvability of solutions of problem (1)-(1) in slowly diffusion case, to obtain the principal term of compactly supported global solutions of problem (1)-(3).

Theorem 1. If $q_1 q_2 < \frac{4(p_1-1)(p_2-1)}{p_1 p_2}$, then every nonnegative solution of the system (1)-(3) is global in time.

References

- [1] Z. Q. Wu, J. N. Zhao, J. X. Yin, and H. L. Li, Nonlinear Diffusion Equations, World Scientific Publishing Co. Inc. River Edge, NJ, 2001.
- [2] J. Zhou and C. L. Mu, The critical curve for a non-Newtonian polytropic filtration system coupled via nonlinear boundary flux // Nonlinear Anal. vol. 68, 2008, no. 1, 1-11.
- [3] Yong-Sheng Mi, Chunlai Mu, and Deng-Ming Liu. Global existence and blow-up for a doubly degenerate parabolic equation system with nonlinear boundary conditions // Glasgow Math. J. 54, 2012, 309-324.
- [4] Mi Yongsheng, Mu Chunlai. Global existence and blow-up of solutions to a class of doubly degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux // Advances in Mathematics (China), Vol.43, No.3, 2014, 398-410.

Derivation of Witt algebra

Rashidova F.F.

National University of Uzbekistan

e-mail: rashidova_feruza@inbox.ru

Infinite-dimensional case is more complicated even in Lie algebra structures. The most simple infinite-dimensional structure are Witt and Virasoro algebras. Complex Witt algebra was first considered by E. Cartan [1] in 1909. This algebra is an example of an infinite-dimensional simple Lie algebra. Recall that Virasoro algebra was introduced due to Witt algebra. In fact, the Virasoro algebra is the one-dimensional central extension of

the Witt algebra. In the work [2] the infinite-dimensional Lie algebras and their representations are studied.

In this work we depict a derivation of algebra W_1 .

Let $A = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ be the algebra of Laurent polynomials in one variable. The Lie algebra of derivations

$$\text{Der}(A) = \text{span}\left\{f(z)\frac{d}{dz} : f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]\right\}$$

is called *Witt algebra* and denoted by W . Obviously, the basis of W can be chosen as $\{e_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$, where $e_j = -z^{j+1}\frac{d}{dz}$.

Then the table of multiplications of W in this basis have the following form:

$$[e_i, e_j] = (i - j)e_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

We also consider the infinite-dimensional positive part W_1 of the Witt algebra. The positive Witt algebra W_1 is an infinite-dimensional Lie algebra which has the basis $\{e_i : e_i = -z^{i+1}\frac{d}{dz}, i \in \mathbb{N}\}$ and the multiplication rule

$$W_1 : [e_i, e_j] = (i - j)e_{i+j}, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Definition 1. A linear map $d: L \rightarrow L$ of a Leibniz algebra $(L, [\cdot, \cdot])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in L$ the following condition holds:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

The set of all derivations of L is denoted by $\text{Der}(L)$. The set $\text{Der}(L)$ is a Lie algebra with respect to the commutator.

For a given element x of a Leibniz algebra L , the right multiplication operator $\mathcal{R}_x: L \rightarrow L$, defined by $\mathcal{R}_x(y) = [y, x], y \in L$ is a derivation. In fact, Leibniz algebras are characterized by this property regarding right multiplication operators. (Recall that left Leibniz algebras are characterized by the same property with left multiplication operators.) As in the Lie case, these kinds of derivations are said to be inner derivations.

The first, we compute derivation of the algebra W_1 .

Proposition 1. Any derivation of the algebra W_1 has the following form:

$$d(e_k) = k\alpha_1 e_k + (k-1)\beta_3 e_{k+1} + (2-k)\alpha_3 e_{k+2} + \sum_{i=4}^t \frac{i-k-1}{i-2} \alpha_i e_{i+k-1},$$

where $k \geq 1$.

Proof. Since the algebra W_1 has two generators (they are $\{e_1, e_2\}$) and a derivation d is completely described by $d(e_1)$ and $d(e_2)$. Since an infinite dimensional vector space has a Hamel basis, each element of the algebra W_1 can be written by a linearly combination of finite number of basis elements

Let

$$d(e_1) = \sum_{s=1}^p \alpha_{i_s} e_{i_s}, \quad d(e_2) = \sum_{t=1}^q \beta_{j_t} e_{j_t}.$$

Without loss of generality one can assume that

$$d(e_1) = \sum_{i=1}^t \alpha_i e_i, \quad d(e_2) = \sum_{j=1}^t \beta_j e_j, \quad t = \max\{p, q\}.$$

Let us prove the following equality:

$$d(e_k) = k\alpha_1 e_k + (k-1)\beta_3 e_{k+1} + (2-k)\alpha_3 e_{k+2} + \sum_{i=4}^t \frac{i-k-1}{i-2} \alpha_i e_{i+k-1}, k \geq 3. \quad (1)$$

We shall prove this equality by induction. For $k = 3$ we have

$$d(e_3) = d([e_2, e_1]) = [d(e_2), e_1] + [e_2, d(e_1)] = \sum_{i=1}^t (i-1)\beta_i e_{i+1} + \sum_{i=1}^t (2-i)\alpha_i e_{i+2}.$$

Let us assume that the equality (1) is true for all values less or equal to k . The proof for $k+1$ completes the following chain of equalities:

$$\begin{aligned} (k-1)d(e_{k+1}) &= d([e_k, e_1]) = [d(e_k), e_1] + [e_k, d(e_1)] = k(k-1)\alpha_1 e_{k+1} + k(k-1)\beta_3 e_{k+2} + \\ &+ (2-k)(k+1)\alpha_3 e_{k+3} + \sum_{i=4}^t \frac{i-k-1}{i-2} (i+k-2)\alpha_i e_{i+k} + (k-1)\alpha_1 e_{k+1} + (k-3)\alpha_3 e_{k+3} + \\ &+ \sum_{i=4}^t (k-i)\alpha_i e_{i+k} = (k-1)((k+1)\alpha_1 e_{k+1} + k\beta_3 e_{k+2} + (1-k)\alpha_3 e_{k+3} + \sum_{i=4}^t \frac{i-k-2}{i-2} \alpha_i e_{i+k}). \end{aligned}$$

Proposition is proved.

References

- [1]. Cartan E., Les groupes de transformations continus, infinis, simples. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 26 (1909) 93-161.
- [2]. Kac V., Raina A., Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, *World Sci. Singapore*, 1987.

Fenchel and Fary-Milnor Inequalities in Analysis of One-Dimensional Hamiltonian Systems

Rassadin A.E.

*Laboratory of infinite-dimensional analysis and mathematical physics
Lomonosov Moscow State University*

Let one consider the following Hamiltonian system:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + U(x). \quad (24)$$

Closed phase trajectory $\gamma_h : H(x, p) = h$ of system (1) can be mapped from its phase plane (x, p) on sphere of unit radius $S^2 \subset R^3$ by means of stereographic projection $\Pi : \gamma_h \rightarrow \Gamma_h$.

Under this mapping image Γ_h of curve γ_h remains both closed and unknotted hence combining the Fenchel inequality and the Fary-Milnor inequality (see [1] and references there in) one can obtain the next inequality:

$$2\pi < \oint_{\Gamma_h} k ds < 4\pi, \quad (25)$$

where k is curvature of Γ_h and ds is element of length of its arc.

It is obvious that this inequality gives additional information about system (1).

Further it is clear that stereographic projection is not unique way to map curve $\gamma_h \subset R^2$ into space R^3 without knottedness resulting in validity of inequality (2). For instance one can do it as follows:

$$\tilde{\Pi} : (x, p) \rightarrow (x, p, \ddot{x}), \quad (26)$$

where in accordance with Hamiltonian (1) $\ddot{x} = -U'(x)$.

In the report presented derivation of inequality (2) in the framework of mapping (3) is compared with the same procedure using stereographic projection on the basis of system (1) with potential well $U(x) = x^4/4$ corresponding to the degenerate Duffing equation.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-08-01356-a).

References

1. Aminov Yu. A. Differential Geometry and Topology of Curves, Nauka, Moscow (1987) [in Russian].

Gibbs measures of Soft-Core Widom-Rowlinson model on Cayley trees

Rozikov U.A.

Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan.

e-mail: rozikovu@yandex.ru

The Cayley tree $\Gamma^k = (V, L)$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k + 1$ edges originate from each vertex. Here V is the set of vertices and L the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them. We will use the notation $l = \langle x, y \rangle$.

The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is the number of edges of the shortest path from x to y .

For a fixed $x^0 \in V$, called the root, we set

$$W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^n W_m, \quad L_n = \{\langle x, y \rangle : x, y \in V_n\}.$$

The configuration space is given by $\Omega := \{-1, 0, 1\}^V$. We denote elements of Ω by ω , σ , etc. Thus a configuration is a function $\omega : i \in V \rightarrow \omega_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Denote by Ω_A the set of all configurations on the set $A \subset V$.

The Hamiltonian for the Soft-Core Widom-Rowlinson model (SCWRM) of the configuration set Ω_{V_n} , is given by

$$H_n^{sc}(\omega) = J \sum_{\langle i, j \rangle \in L_n} \mathbf{1}(\omega_i \omega_j = -1) - \frac{\ln(\lambda)}{\beta} \sum_{i \in V_n} \omega_i^2.$$

where $\beta = \frac{1}{T}$ and $T > 0$ is the temperature. The parameter $J \in \mathbb{R}$ is repulsion or attraction between particles and $\lambda > 0$ is an activity. See [1] for theory of Gibbs measures on Cayley trees.

The talk will be devoted to results of [2]:

- For $k = 2, 3$ the ferromagnetic ($J > 0$) model has either one or three splitting Gibbs measures (tree-automorphism invariant Gibbs measures (TISGM) which are tree-indexed Markov chains).
- In parameter space the exact form of the critical curves $\lambda_{cr}(k, J, \beta)$ of non-uniqueness of Gibbs measure.
- For higher values of k an explicit sufficient bound ensuring non-uniqueness is given.
- For the antiferromagnetic model ($J < 0$) two critical curves $\lambda_{cr,i}(k, \theta)$, $i = 1, 2$ are explicitly given, and proved that on these curves there are exactly two TISGMs; between these curves there are exactly three TISGMs; otherwise there exists a unique TISGM.

References

- [1]. Rozikov U.A., *Gibbs measures on Cayley trees*, World Sci. Publ. Singapore. 2013.
 [2]. Kissel S., Koulske C., Rozikov U.A., Hard-core and soft-core Widom-Rowlinson models on Cayley trees. *Jour. Stat. Mech.: Theory and Exper.* 2019. P043204, 22 pages.

The limit behavior of the discrete-time Leslie Predator-Prey model

Rozikov.U.A., Shoyimardonov S.K.

V.I. Romanovskiy Institute of mathematics

e-mail: rozikovu@yandex.ru

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi

e-mail: shoyimardonov@inbox.ru

The Leslie's prey-predator model in continuous time is considered in work [1]. In ecology and mathematical biology the relationship between predators and their prey has large research area and they are interesting with their importance.

At time moment $t \geq 0$ consider the following model:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx - cy) \\ \frac{dy}{dt} = y(d - \alpha \frac{y}{x}). \end{cases} \quad (27)$$

Where $\frac{dx}{dt}$ and $\frac{dy}{dt}$ - the rate of change in the number of preys and predators, c - the intensity of eating the prey x by the predator y , a - the intensity of the natural increase in the preys population, all parameters are positive. We consider a model of discrete time process of Leslie's prey-predator model (53), which has the following form

$$V : \begin{cases} x^{(1)} = x(a - 1 - bx - cy) \\ y^{(1)} = y(d - 1 - \alpha \frac{y}{x}). \end{cases} \quad (28)$$

where $(x, y) \in R_+^2 = \{(u, v) \in R^2 : u > 0, v \geq 0\}$ and $a > 1, b > 0, c > 0, d > 1, \alpha > 0$.

Definition 1. The set M is called an *invariant* with respect to operator V if $V(M) \subset M$.

Proposition 1. The following sets are invariant with respect to the operator V :

- (1) $M_1 = \{(x, y) \in R_+^2 | 0 < x < \frac{a-1}{b}, y = 0\}$
- (2) $M_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{\alpha(a-1)}{b\alpha+cd-c}, 0 \leq y \leq \frac{(d-1)x}{\alpha}\}$.

Theorem 1. Let $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in M_2$ be an initial point which is not fixed points and let $1 < d \leq 2$. Then

- (i) If $4 < a < 2 + \sqrt{6} \approx 4.4494$ then the trajectory V^n asymptotically (as $n \rightarrow \infty$) has period two;
- (ii) If $2 + \sqrt{6} < a < 4.543$ then V^n asymptotically has period four;
- (iii) If $4.544 < a < 4.564$ then V^n asymptotically has period eight;
- (iv) If $a > 3 + \sqrt{5}$ then V has chaotic dynamics (see [2] for definitions).

References

- [1] M.A. Aziz-Alaoui, *Study of a Leslie–Gower-type tritrophic population model*. Chaos, Solitons and Fractals 14 (2002) 1275–1293.
- [2] Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. Westview Press, 2003.

On a piecewise-continuous dynamical system

Rozikov U.A., Usmonov J.B.

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovski
e-mail: rozikovu@yandex.ru, javohir0107@gmail.com

Let f be a function $f : X \rightarrow X$. For $x \in X$ denote by $f^n(x)$ the n -fold composition of f with itself (i.e. n time iteration of f to x):

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f(x))))}_{n \text{ times}}.$$

Definition 1.[1] For arbitrary given $x_0 \in X$ and $f : X \rightarrow X$ the discrete-time dynamical system (also called forward orbit or trajectory of x_0) is the sequence of points

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), x_3 = f^3(x_0), \dots \quad (29)$$

Definition 2. A point $x \in X$ is called a fixed point for $f : X \rightarrow X$ if $f(x) = x$. The point x is a periodic point of period p if $f^p(x) = x$. The least positive p for which $f^p(x) = x$ is called the prime period of x .

Consider the dynamical system generated by the function $f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ defined by

$$f_{a,b}(x) \equiv f(x) = \begin{cases} x(1 + a - ax), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \\ x(1 - b + bx), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (30)$$

where by the symmetry of parameters we can assume that $a, b \in [0, 1]$.

It is clear that, the function is a piecewise-continuous, that's, it is discontinuous at the point $x = \frac{1}{2}$ when $(a, b) \neq (0, 0)$ and, is smooth at each semi interval.

Proposition 1. Let $A = (\frac{1}{2} - \frac{b}{4}, \frac{1}{2} + \frac{a}{4}]$ be subset of $[0, 1]$. Then $f(A) = A$.

Lemma 1. For any $x \in [0, 1] \setminus A$ there exists $n_0(x) \in \mathbb{N}$, such that $f^{n_0(x)}(x) \in A$.

Theorem 1. The dynamical system generated by the function (30) has 2-periodic points if and only if the parameters a, b satisfy the following conditions

$$a \in (0, 1), b < \frac{a}{1-a} \quad (31)$$

Theorem 2. If f has a periodic point then the point is a repelling.

Proposition 2. If the dynamical system generated by the function (30) satisfies the condition

$$a \in (0, 1], \quad a \leq b \leq \frac{4a}{4-a^2} \quad (32)$$

then the dynamical system has no odd periodic points.

References

- [1]. R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical system*, Westview Press, 2003.

On some properties of alternating measure functors

Yu. V. Sadovnichy

Functors U^ε , $\varepsilon = \beta, R, \tau$ of the unit ball of alternating Borel measure are investigated. It is shown that these functors satisfy only three of the seven properties of normality, inherent in functors probability measure. Namely, these functors are almost continuous, preserve maps with dense images and intersections of closed subsets normal space. In addition, for an infinite discrete space X space $U^\varepsilon(X)$ does not satisfy the first axiom of countability and does not even spaces are Frechet-Uryson. It follows that the $U^\varepsilon : \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{Tych}$ functors do not preserve topological embeddings, the weight of topological spaces and their metrizability. Also, these functors do not retain perfect mappings (even spaces with counting base). It is worth noting that in the category **Comp** compact spaces functor $U = U^\beta = U^R = U^\tau$ has all the properties of a normal functor except properties for saving an empty set, point, and preimages.

Literature

1. Yu. V. Sadovnichy. On the Kantorovich norm for alternating measures / / reports of RAS.1999, volume 368, no. 4, pp. 459-461.
2. V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov. General topology. Basic design. — Moscow: Moscow state University Publ., 1988.

The psuedo weight and the π -weight of space of the permutation degree

Sadullaev A., Mukhamadiev F.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

A permutation group X is the group of all permutations (i.e. one-one and onto mappings $X \rightarrow X$). A permutation group of a set X is usually denoted by $S(X)$. If $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $S(X)$ is denoted by S_n , as well.

Let X^n be the n -th power of a compact X . The permutation group S_n of all permutations, acts on the n -th power X^n as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by $SP^n X$. Thus, points of the space $SP^n X$ are finite subsets (equivalence classes) of the product X^n . Thus two points $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$ are considered to be equivalent if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_{\sigma(i)}$. The space $SP^n X$ is called the n -permutation degree of a spaces X [1]. Equivalence relations by which we obtained spaces $SP^n X$ and $\exp_n X$, is called the symmetric and hypersymmetric equivalence relations, respectively. Any symmetrically equivalent points X^n are hypersymmetrically equivalent. But inverse is not correct. So, for $x \neq y$ points $(x, x, y), (x, y, y) \in X^3$ are hypersymmetrically equivalent, but not symmetrically equivalent.

The concept of a permutation degree has generalizations. Let G be any subgroup of the group S_n . Then it also acts on X^n as group of permutations of coordinates. Consequently, it generates a G -symmetric equivalence relation on X^n . The quotient space of the product X^n under the G -symmetric equivalence relation, is called G -permutation degree of the space X and is denoted by $SP_G^n X$. An operation SP_G^n is also the covariant functor in the category of compacts and is said to be a functor of G -permutation degree. If $G = S_n$ then $SP_G^n = SP^n$. If the group G consists only of unique element then $SP_G^n X = X^n$. Moreover, if $G_1 \subset G_2$ for subgroups G_1, G_2 of the permutation group S_n then we get a sequence of the factorization of functors:

$$X^n \rightarrow SP_{G_1}^n \rightarrow SP_{G_2}^n \rightarrow SP^n \rightarrow \exp_n.$$

Theorem. *Let X be an infinite compact T_1 -space, n positive integer and $G_1 \subset G_2$ for subgroups G_1, G_2 of the permutation group S_n . Then*

- 1) $\psi w(X^n) = \psi w(SP_{G_1}^n X) = \psi w(SP_{G_2}^n X) = \psi w(SP^n X) = \psi w(S_n)$;
- 2) $\pi(X^n) = \pi(SP_{G_1}^n X) = \pi(SP_{G_2}^n X) = \pi(SP^n X) = \pi(S_n)$.

References

- [1]. Fedorchuk V. V., Filippov V. V. Topology of hyperspaces and its applications. Topology and its Applications, 1989, V.4, №4, P.3-48.

Invariants of m -tuples for the group of all linear similarities in the two-dimensional bilinear-metric space with the form $x_1y_1 - 5x_2y_2$ over the field of rational numbers

Sevara SAFAROVA, Djavvat KHADJIEV

National University of Uzbekistan, 100174 Tashkent, Uzbekistan

Let Q^2 be the two-dimensional vector space over the field Q of rational numbers. For $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in Q^2$, we put $\sigma(a, b) = a_1b_1 - 5a_2b_2$. Then $\sigma(x, y)$ is a bilinear form on Q^2 and (Q^2, σ) is a two-dimensional bilinear-metric space over Q . Denote by M_a the following matrix $\begin{pmatrix} a_1 & 5a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$. Put $LSim(\sigma, Q) = \{M_a | a \in Q^2, a \neq 0\}$. The set $LSim(\sigma, Q)$ is a group with respect to the multiplication of matrices. The group $LSim(\sigma, Q)$ is an analog of the group of all linear similarities in the two-dimensional Euclidean space (see [?] below).

Let N be the set of all natural numbers and $m \in N$. Put $N_m = \{k \in N | 1 \leq k \leq m\}$. A mapping $u : N_m \rightarrow Q^2$ will be called m -tuple in Q^2 . Denote it in the following form $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, where $u_j \in Q^2, \forall j \in N_m$. Two m -tuples $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ and $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ are called $LSim(\sigma, Q)$ -equivalent if there exists $H \in LSim(\sigma, Q)$ such that $v_j = Hu_j, \forall j \in N_m$. This equivalence denoted by $u \stackrel{LSim(\sigma, Q)}{\sim} v$.

A function $f : Q^2 \rightarrow Q$ is called $LSim(\sigma, Q)$ -invariant on Q^2 if $f(Ha) = f(a), \forall a \in Q^2, \forall H \in LSim(\sigma, Q)$. The functions $\sigma(a, b) = a_1b_1 - 5a_2b_2$ and $[ab] = a_1b_2 - a_2b_1$ are $LSim(\sigma, Q)$ -invariant functions. Let $u, v \in Q^2$. In the case $u = 0, v \neq 0$, they are not $LSim(\sigma, Q)$ -equivalent. In the case $u \neq 0, v \neq 0$, they are $LSim(\sigma, Q)$ -equivalent. In the case $u = 0, v = 0$, they are $LSim(\sigma, Q)$ -equivalent.

Theorem. Let $u = (u_1, u_2, \dots, u_m), v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ be two m -tuples in Q^2 such that $u_1 \neq 0, v_1 \neq 0$.

(i). Assume that $u \stackrel{LSim(\sigma, Q)}{\sim} v$. Then the following equalities hold

$$\begin{cases} \frac{\sigma(u_1, u_j)}{\sigma(u_1, u_1)} = \frac{\sigma(v_1, v_j)}{\sigma(v_1, v_1)}, \forall j \in N_m, j > 1; \\ \frac{[u_1 u_j]}{\sigma(u_1, u_1)} = \frac{[v_1 v_j]}{\sigma(v_1, v_1)}, \forall j \in N_m, j > 1. \end{cases} \quad (33)$$

(ii). Conversely, assume that equalities Eq.(1) hold. Then there exists the unique matrix $H \in LSim(\sigma, Q)$ such that $v_j = Hu_j, \forall j \in N_m$.

References

[1]. Djavvat Khadjiev, Idris ●Oren, ●Omer Pekşen, *Global invariants of paths and curves for the group of all linear similarities in the two-dimensional Euclidean space*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, Vol. 15, No. 6 (2018) 1850092 (28 pages).

Circle maps with non-flat critical point

Safarov U.

Turin polytechnic university in Tashkent

e-mail: safarovua@mail.ru

Let T be an orientation preserving homeomorphism of the circle $S^1 \equiv R^1/Z^1$ with lift $f : R^1 \rightarrow R^1$, which is continuous, strictly increasing and fulfills $f(x+1) = f(x) + 1$, $\forall x \in R$. The circle homeomorphism T is then defined by $Tx = f(x) \pmod{1}$, $x \in S^1$. An important characteristic of circle homeomorphism is **rotation number** defined by Poincaré [1] as

$$\rho_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(x)}{n} \pmod{1}.$$

The purpose of this paper is to study certain rigidity questions concerning critical circle mappings. Yoccoz's classical theorem [2] states, that an analytic critical circle homeomorphism T with irrational rotation number $\rho = \rho_T$ is topologically conjugate to a rigid rotation T_ρ that is, there exists a homeomorphism φ of the circle with $T = \varphi^{-1} \circ T_\rho \circ \varphi$.

Here then arises naturally the problem of regularity of the conjugacy between two critical circle maps with identical irrational rotation number. The regularity of conjugacy between two critical circle homeomorphisms with identical irrational rotation number studied in detail by J. Yoccoz [2], E. de Faria and W. de Melo [3], K. Khanin and A. Teplinskii [4], A. Avila [5], D. Khmelev and M. Yampolskii [6].

Let us now define the maps which are the main object of study in the present paper. We start with the notion of non-flat critical point.

Definition 1. *The point $x_{cr} \in S^1$ is called non-flat critical point of a homeomorphism T with order $d \in R^1$, $d > 1$, if for a some δ -neighborhood $U_\delta(x_{cr})$, the homeomorphism T can be written as $Tx = \phi(x)|\phi(x)|^{d-1} + Tx_{cr}$, where ϕ is a C^3 local diffeomorphism with $\phi(x_{cr}) = 0$.*

Our main result is the following

Theorem 1. *Let T_1 and T_2 be C^k , $k \geq 2$ critical circle homeomorphisms with the same irrational rotation number. Suppose that order at the critical points of T_1 and T_2 do not coincide. Then they are singular conjugate to each other.*

References

- [1]. Cornfeld I.P., Fomin S.V. and Sinai Ya.G.: *Ergodic Theory*, Springer Verlag, Berlin (1982).
- [2]. Yoccoz J.C.: Il n'a pas de contre-exemple de Denjoy analytique. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser.I, Math. 298(7), 141-144 (1984).
- [3]. de Faria E., de Melo W.: Rigidity of critical circle mappings I. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1(4), 339-392 (1999).
- [4]. Khanin K., Teplinsky A.: Robust rigidity for circle diffeomorphisms with singularities. Invent. math. 169, 193-218 (2007).
- [5]. A. Avila: On rigidity of critical circle maps. Bull. Math. Soc., 44(4), P.611-619 (2013).
- [6]. D. Khmelev, M. Yampolski: Rigidity problem for analytic critical circle maps. Mos. Math. Journ., 6(2), P.317-351 (2006).

A pursuit problem in the Pontryagin example with Gronwall type constraint

Samatov B.T.¹, Soyibboev U.B.²

^{1,2}*Namangan State University*

e-mail: samatov57@inbox.ru; u.soyibboev@yandex.com

In this paper, we study the pursuit problem for the Pontryagin example when Gronwall type constraint imposed on control functions of players. Here the new sufficient solvability conditions for pursuer will be proposed.

Let **P** and **E** objects with opposite aim be given in the space R^n and their movements based on the following differential equations and initial conditions

$$\mathbf{P} : \ddot{x} - a\dot{x} = u, \quad x_1 - kx_0 = 0, \quad |u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2l \int_0^t |u(s)|^2 ds, \quad (34)$$

$$\mathbf{E} : \ddot{y} - a\dot{y} = v, \quad y_1 - ky_0 = 0, \quad |v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2l \int_0^t |v(s)|^2 ds, \quad (35)$$

where $x, y, u, v \in R^n$, $n \geq 2$; $a, k \neq 0$, $l \neq a$; $\rho, \sigma, l \geq 0$; x and y are the locations of pursuer **P** and evader **E** correspondingly; $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ are the initial locations of the objects respectively at $t = 0$ and it is assumed that $x_0 \neq y_0$; $x_1 = \dot{x}(0)$, $y_1 = \dot{y}(0)$ are the initial velocity of the objects correspondingly at $t = 0$.

Theorem. Let $\delta = \sigma - \rho$ and one of the following conditions holds, that is,

1. $\delta < 0$, $a \in (-\infty, 0) \cup (0, l)$, $k = \delta/|z_0|(l - a)$;
2. $\delta < 0$, $a \in (l, l + \delta/|z_0|l)$, $k \in (\delta/|z_0|(l - a), \delta(l + a)/|z_0|l(l - a))$;
3. $\delta = 0$, $a < 0$, $k < a$;
4. $\delta = 0$, $a > 0$, $k < 0$.

Then a guaranteed pursuit time will be as follows:

$$T = \begin{cases} \frac{1}{l} \ln \left(\frac{1}{a} \left(\frac{l|z_0|(a-k)(l-a)}{\delta} - 1 \right) \right), & \text{if } a \in (-\infty, 0) \cup (0, l), \quad k = \delta/|z_0|(l - a), \\ & \delta < 0, \\ \frac{1}{a} \ln(1 - \frac{a}{k}), & \text{if } a > 0, \quad k < 0, \quad \delta = 0 \\ \text{p.r.e. } Ae^{lt} + B = e^{at}, & \text{or } a < 0, \quad k < a, \quad \delta = 0, \\ & \text{if } a \in (l, l + \delta/|z_0|l), \quad \delta < 0, \\ & k \in (\delta/|z_0|(l - a), \delta(l + a)/|z_0|l(l - a)), \end{cases}$$

where $A = \frac{\delta}{\delta - |z_0|k(l - a)}$, $B = \frac{(\delta + |z_0|l(a - k))(l - a)}{l(\delta - |z_0|k(l - a))}$; p.r.e. – a positive root of the equation.

References

1. **Pontryagin L.S.** Selected Works. MAKS Press, Moscow., – 2004.
2. **Gronwall T.H.** Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 20(2). 1919. 293-296.
3. **Azamov A.A., Samatov B.T.** The II-Strategy: Analogies and Applications. The Fourth International Conference Game Theory and Management, St. Petersburg, Russia, Collected papers. – P. 33-47, June 28-30, 2010.

4. **Blagodatskikh A.I., Petrov N.N.** Conflict interaction of groups of controlled objects. Izhevsk: Udmurt State University - 2009.
5. **Chikrii A.A.** (1997) Conflict-Controlled Processes. Kluwer, Dordrecht.

Automorphism groups of dense subgroups of $\mathbb{R}^n$

Vitalij A. Chatyrko and Dmitri B. Shakhmatov
Linköping University, Sweden and Ehime University, Japan

The symbol $GL(V)$ denotes the group of linear bijective maps of a vector space V with the composition of maps as its group operation. When V is a topological vector space, we use the symbol $HGL(V)$ to denote the subgroup of $GL(V)$ consisting of continuous maps $\varphi \in GL(V)$ whose inverse φ^{-1} is also continuous; that is, $HGL(V)$ is the group of linear bijections of V which are simultaneously homeomorphisms of V onto itself.

Let X be a subspace of a topological vector space V . We denote by $\Phi(X) = \{\varphi \in HGL(V) : \varphi(X) = X\}$ the subgroup of $HGL(V)$ consisting of all φ that map X onto itself, or equivalently, of all maps $\varphi \in HGL(V)$ whose restriction $\varphi|_X : X \rightarrow X$ to X is a homeomorphism of X onto itself. The restriction map $r_X : \Phi(X) \rightarrow \text{Homeo}(X)$ defined by $r_X(\varphi) = \varphi|_X$ for $\varphi \in \Phi(X)$ is a group homomorphism from $\Phi(X)$ to the group $\text{Homeo}(X)$ of homeomorphisms of X onto itself.

Let G be a topological group. We call a map $f : G \rightarrow G$ an *automorphism* of G provided that f is simultaneously an isomorphism (of the group G onto itself) and a homeomorphism (of the topological space G onto itself). The symbol $\text{Aut}(G)$ denotes the group of all automorphisms of G with the composition of maps as its group operation.

A topological vector space V is *complete* if its additive group $(V, +)$ is Raikov complete.

Theorem. Let G be a dense subgroup (of the additive group $(V, +)$) of a complete vector space V over the field $\mathbb{R}$ of real numbers. Then the map $r_G : \Phi(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ is an isomorphism between the subgroup $\Phi(G)$ of the group $HGL(V)$ and the automorphism group $\text{Aut}(G)$ of G . In particular, $\Phi(G)$ is an isomorphic copy of $\text{Aut}(G)$ in $HGL(V)$.

In this talk we consider two general problems inspired by this theorem.

Problem 1. Given a dense subgroup G (of the additive group $(V, +)$) of a complete vector space V over the field $\mathbb{R}$ of real numbers, “calculate” the automorphism group $\text{Aut}(G)$ of G , or equivalently, the subgroup $\Phi(G)$ of $HGL(V)$.

The second problem is a converse problem to Problem 1.

Problem 2. Given a complete vector space V over $\mathbb{R}$ and a subgroup H of the group $HGL(V)$, can one find a dense subgroup G (of the additive group $(V, +)$) of V such that $\Phi(G) = H$? In other words, which subgroups of $HGL(V)$ are naturally isomorphic to the automorphism group $\text{Aut}(G)$ of some dense subgroup G of V ?

We make a substantial progress on these two problems in the finite-dimensional case when $V = \mathbb{R}^n$ for some positive integer n . In this case, all linear maps from V to itself are automatically continuous, so the equality $HGL(V) = GL(V)$ holds, and $GL(V)$ is isomorphic to the general linear group $GL(n, \mathbb{R})$ of non-degenerated $(n \times n)$ -matrices with real coefficients. Therefore, $\Phi(G)$ can be viewed as a subgroup of the matrix group $GL(n, \mathbb{R})$, and the inverse map $r_G^{-1} : \text{Aut}(G) \rightarrow \Phi(G) \subseteq GL(V) \cong GL(n, \mathbb{R})$ of r_G can

be viewed as a faithful representation of the automorphism group $\text{Aut}(G)$ in the matrix group $GL(n, \mathbb{R})$.

We prove that $|\text{Aut}(G)| \leq |G|$ for every dense subgroup G of $\mathbb{R}^n$, yet this inequality may fail for a dense subgroup G of $\mathbb{R}^\omega$.

It turns out that even the one-dimensional case $V = \mathbb{R}$ is rather complicated, with Problems and having interesting and non-trivial connections with number theory. Note that $GL(1, \mathbb{R})$ is isomorphic to the multiplicative group $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ of the ring $\mathbb{R}$ of real numbers. (Here $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.)

As an example of our result related to Problem , we prove that, for an integer number $n \geq 2$, the subgroup $SL^\pm(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = \pm 1\}$ of $GL(n, \mathbb{R}) \cong HGL(\mathbb{R}^n)$ cannot be realized as $\Phi(G)$ for any dense subgroup G of $\mathbb{R}^n$.

The psuedo weight and the π -weight of the space Nemytskii plane

Shakhobiddinova Z., Kurakbaev Sh., Eshtemirova SH.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

$\beta \subset \tau(X)$ is a pseudo base of X if for every $p \in X$ we have $\{p\} = \{B \in \beta : p \in B\}$. Clearly X has a pseudo base if and only if $X \in T_1$. Thus in the following definition $X \in T_1$. $\psi w(X)$ is called the pseudo weight of X .

$$\psi w(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ is a pseudo base of } X\} + \aleph_0.$$

$\beta \subset \tau(X) \setminus \{\emptyset\}$ is said to be a π - base of X if for every nonempty open set G there is a $B \in \beta$ with $B \subset G$.

$$\pi(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ is a } \pi\text{- base of } X\} + \aleph_0.$$

$\pi(X)$ is called the π - weight of X [1].

Let $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ be the upper half plane and let M be the line $y = 0$. For $z \in M$ and $\varepsilon > 0$, let $W(z, \varepsilon)$ denote the set of points inside the circle in L of radius ε which is tangent to M at z . Set $W_i(z) = W(z, \frac{1}{i}) \cup \{z\}$ for $i \in \mathbb{N}$. If $z \in L/M$, then we take $W_i(z)$ to be the set of all points in L which lie inside the circle of radius $\frac{1}{i}$ with center at the point z , $i \in \mathbb{N}$. The set $B = \{W_i(z) : z \in L, i \in \mathbb{N}\}$ is a base of a topology on L . The set L together with this topology is called the Nemytskii plane. It is easy to check that L is a regular Hausdorff space. The subset M is closed in the Nemytskii plane, M is discrete as a subspace of L . At the same time, the topology induced on $P = L/M$ by the Nemytskii plane is the same as its topology as a subspace of $\mathbb{R}^2$ with the usual topology. Thus, the Nemytskii plane is a union of two metrizable subspaces M and P , one of which is open and the other closed. However, the Nemytskii plane itself is not metrisable [2].

Let τ_E and τ_L denote the usual (Euclidian) topology of $\mathbb{R}^2$ and the topology of the Nemytskii plane L , respectively.

For an point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, set $O_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$. The family of subsets in the form of $O_\varepsilon(x)$ is a base $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$.

Definition. Let A be a subset of the set L . We define the topology $\tau(A)$ on the set $\mathbb{R}^2$ as follows:

- 1) For each $(x, y) \in A$, $\{O_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$ is the neighborhood base at (x, y) ;

2) For each $(x, y) \in R^2/A$, $\{W_i(z) : z \in L, i \in N\}$ is the neighborhood base at (x, y) .

Proposition. For any subset $A \subseteq L$ we have

1) $\psi w(R^2, \tau(A)) = \aleph_0$;

2) $\pi(R^2, \tau(A)) = \aleph_0$.

References

- [1]. I.Juhasz, Cardinal functions in topology - ten years later // MATHEMATICAL CENTRE TRACTS 123, Amsterdam 1980, p.160.
- [2]. R. Engelking, General topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

Second order differential invariants of submersions

Sharipov X.F.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: sh_xurshid@yahoo.com

Consider a conformal vector field in three-dimensional Euclidean space:

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (36)$$

Consider the submersion $\varphi : R^3 \rightarrow R, \varphi(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) - x_3$. Find the second-order differential invariants of this submersion (invariants of level surface) with respect to conformal transformations generated by the flow of a vector field (1).

The directions in the tangent plane where the curvature takes its maximum and minimum values are always perpendicular, if k_1 does not equal k_2 , and are called principal directions.

Theorem 1. Under the transformations generated by the flow of the vector field (1), the principal directions of the level surfaces of the submersion are transferred to the principal directions.

Theorem 2. The ratio $\frac{k_1}{k_2}$ of principal curvatures of level surface of a submersion is second-order differential invariant of the group of conformal transformations generated by the flow of a vector field (1).

Theorem 3. Under conformal transformations generated by the flow of the vector field (1), the asymptotic direction of the level surfaces of the submersion is transferred to the asymptotic direction .

References

- [1]. Alekseevsky D.V., Vinogradov A.M., Lychagin V.V. Basic ideas and concepts of differential geometry. The results of science and technology. Modern problems of mathematics. Fundamental directions. - Moscow: VINITI. 1988-28.-298 p.
- [2]. Vinogradov A.M., Krasilshchik I.S., Lychagin V.V. Introduction to the geometry of nonlinear differential equations. M. Science. Ch. ed. Phys.-Mat. lit., 1986. 336 p.
- [3]. Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 101. Cambridge: Cambridge University Press. 2007. XXII+496 P.

[4]. Narmanov A.Y., Sharipov X.F. Differential invariants of submersions. Uzbek mathematical Journal. 2018 N-3 pp. 132-138. DOI:10.29229/uzmj.2018-3-12

[5]. Sharipov X.F. Second order differential invariants of submersions. Uzbek mathematical Journal. 2019 N-3 pp. 147-156. DOI:10.29229/uzmj.2019-3-16

Integral in Non-Standard Calculus

Shchepin E.V.

Mathematical Institute, 119991, Gubkina 8, Moscow

e-mail: scepini@mi.ras.ru

According to Leibniz the integral is "the sum of infinite number of infinitesimals". One presents a construction of differential and integral for non-standard calculus adequate to the Leibniz vision. This construction gives an integral equivalent to the Lebesgue-Stieltjes one.

Characteristically nilpotent Leibniz algebras

Shermatova Z.Kh.

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovski

e-mail: ladyzarina@yahoo.com

In 1955, Jacobson [1] proved that every Lie algebra over a field of characteristic zero admitting a non-singular derivation is nilpotent. The problem whether the inverse of this statement is correct remained open until an example of an 8-dimensional nilpotent Lie algebra all of whose derivations are nilpotent was constructed in [2]. They called such type of algebras characteristically nilpotent Lie algebras. If all derivations of an algebra are nilpotent (inner derivations are nilpotent, as well), then by Engel's theorem we conclude that a characteristically nilpotent Lie algebra is nilpotent. The inverse statement is not true, because there exist nilpotent Lie algebras admitting non-nilpotent derivations. Therefore, the subset of characteristically nilpotent Lie algebras is strictly embedded into the set of nilpotent Lie algebras.

The notion of Leibniz algebra has been introduced in [3] as a non-antisymmetric generalization of Lie algebras. An analogue of Jacobson's theorem was proved for Leibniz algebras [4]. Moreover, it is shown that similarly to the case of Lie algebras for Leibniz algebras the inverse of Jacobson's statement does not hold. In [5], analogously as for Lie algebras, the notion of characteristically nilpotent Leibniz algebra was defined and some families of characteristically nilpotent filiform Leibniz algebras were found.

Definition 1. *A nilpotent Leibniz algebra is called characteristically nilpotent if all its derivations are nilpotent.*

The class of characteristically nilpotent Leibniz algebras is a subclass of the nilpotent Leibniz algebras.

Lemma 1. *If L is characteristically nilpotent Leibniz algebra, then (1) the center of L is contained in $[L, L]$; (2) $L^3 \neq 0$.*

Theorem 1. *Let L be a Leibniz algebra which is a direct sum of ideals $L_i (i = 1, 2, \dots, r)$. Then L is characteristically nilpotent if and only if the L_i are characteristically nilpotent algebras.*

Remark 1. *If L is a nilpotent Leibniz algebra such that $D(L)L \subset [L, L]$, then L is also characteristically nilpotent.*

References

- [1]. Jacobson N., A note on automorphisms and derivations of Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 281–283.
- [2]. Dixmier J. and Lister W. G., Derivations of nilpotent Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 155–158.
- [3]. Loday J.L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz, Ens. Math., vol. 39, (1993), 269–293.
- [4]. Ladra, M., Rikhsiboev, I.M., Turdibaev, R.M.: Automorphisms and derivations of Leibniz algebras. Ukrainian Math. Journal, 2016, 68(7), 933–944.
- [5]. Omirov, B.A.: On derivations of filiform Leibniz algebras. Math. Notes 2005, 77(5), 677–685.

An Potential Solvable Lie Algebra with Potential Nilpotent Lie Ideal

Solijanov G.O.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: gulhayo.solijonova@mail.ru

Let's give some notions for infinite dimensional Lie algebras which they have only countable number of basis elements.

Definition 1. A Lie algebra L is called a potential solvable, if $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$.

Definition 2. An algebra L is said to be a potentially nilpotent algebra if $\bigcap_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ [1].

Definition 3. Let $d_1, d_2, \dots, d_n$ be derivations of an infinite dimensional Lie algebra L over a field F . The derivations $d_1, d_2, \dots, d_n$ are said to be potential nil-independent derivations if $\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_n d_n$ is not potential nilpotent for any scalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$. In other words, $d_1, d_2, \dots, d_n$ are called potential nil-independent derivations when $\bigcap_{i=1}^{\infty} (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_n d_n)^i = 0$ is suitable if and only if $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Let's determine some properties of an potential nilpotent Lie algebra W_1 which its multiplication table is given by the following table [2, example 1.4]:

$$W_1 : [e_i, e_j] = (i - j)e_{i+j}, \text{ where } i, j = 1, 2, \dots$$

and $\{e_1, e_2, \dots\}$ are basis elements of the algebra W_1 .

Lemma 1. Let R be an potential solvable Lie algebra whose maximal by including potential nilpotent ideal is W_1 and Q be a complementary vector space to W_1 . Then we have $\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Im } R_x^i \neq 0$ for every $x \in Q$.

Theorem 1. Let W_0 be an potential solvable Lie algebra whose maximal by including potential nilpotent ideal is W_1 . Then there is a basis $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$ of the algebra W_0 such

that the multiplication table of W_0 with respect to the basis has the following form:

$$W_0 : \{ [e_i, e_j] = (i - j)e_{i+j}, \quad i, j \geq 0, \}$$

It is proved by determining the derivations, checking Jacobi identity and using properties of potentially solvable Lie algebras.

References

- [1]. B.A.Omirov, *Thin Leibniz Algebras*, Mathematical Notes, vol., 80, no. 2, (2006), 244–253.
- [2]. D.V.Millionshchikov, *Naturally Graded Lie Algebras (Carnot Algebra) of Slow Growth*, arXiv:1705.07494v2 [math.RA] 25 Dec 2017

On a new metric on the space of probability measures

Tagaymuratov A. O.

Chirchik State Pedagogical Institute, Chirchik, Uzbekistan
e-mail: abror.t93@mail.ru

On a new metric on the space of probability measures

Let X be a compactum. Fix a metric on X . The algebra of all continuous maps on X we denote by $C(X)$. Note that a non-negative linear functional $\mu: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be a probability measure on X , if $\mu(1_X) = 1$. A set of all probability measures we denote as $P(X)$. The set $P(X)$ equipped with point-wise convergence topology. The sets of the view

$$\langle \mu; \varphi_1, \dots, \varphi_k; \varepsilon \rangle = \{ \nu \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, k \}$$

form a base of the topology, $\mu \in P(X)$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = 1, \dots, k$, $\varepsilon > 0$. $P(X)$ is a compact Hausdorff space with respect to the point-wise convergence topology. Moreover, $P(X)$ is a compactum iff X is so.

In [1] it was mentioned a metric ρ_1 on $P(X)$, which is an extension of the given metric on X . Suppose ρ is a metric on X . The metric ρ_1 defines as following: $\rho_1(\mu_1, \mu_2) = \inf\{\rho(\lambda) : \lambda \in P(X^2), P(\pi_i) = \mu_i, i = 1, 2\}$, $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$. Here $\pi_i: X^2 \rightarrow X$ is the projection on the i -th factor. It is well-known that ρ_1 generates on $P(X)$ the point-wise convergence topology, and extends the given metric ρ on X .

In [2] authors suggested a metric ρ_Z on the space of all monetary risk measures. In the present paper we show that the restriction $\rho_Z|_{P(X) \times P(X)}$ of the metric introduced in [2] is a metric on $P(X)$ as well. Besides, we show that the inequality $\rho_1(\mu_1, \mu_2) \leq \rho_Z(\mu_1, \mu_2)$ holds, $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$. This new metric on $P(X)$ we define by the rule

$$\rho_Z(\mu_1, \mu_2) = \inf\{\sup\{\rho(x, y) : (x, y) \in \text{supp}\lambda\} : \lambda \in P(X^2), P(\pi_i)(\lambda) = \mu_i, i = 1, 2\}, \\ \mu_1, \mu_2 \in P(X) \quad (37)$$

Note that similarly metric it was considered in [3].

The results of our work are the following statements.

Theorem 1. A function $\rho_Z: P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}$, defined by (1) is a metric on $P(X)$.

Proposition 1. ρ_Z extends the metric ρ , i. e. $\rho_Z|_{X \times X} = \rho$.

Theorem 2. ρ_Z generates a point-wise convergence topology on $P(X)$.

Proposition 2. $\text{diam}(P(X), \rho_Z) = \text{diam}(X, \rho)$.

Proposition 3. We have $\rho_1 \leq \rho_Z$.

Referee

[1]. Fedorchuk V. V., Probability measures in topology, Russian Math. Surveys, Vol. 46(1991), No 1, pp. 45–93.

[2]. Ayupov Sh. A., Zaitov A. A., On a metric on the space of monetary risk measures, arXiv:1906.11205.pdf, 2019, 10 pages.

[3]. Zaitov A. A., On metrisation of the space of idempotent probability measures, arxiv.org/pdf/1905.02466.pdf, 2019, 13 pages.

Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model. fourth doublet state

Tashpulatov S.M.

Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republik of Uzbekistan

e-mail: sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.rutoshpul@inp.uz

We consider the energy operator of five-electron systems in the Hubbard model and describe the structure of essential spectrum and discrete spectrum of the system in the fourth doublet state. The Hamiltonian of the chosen model has the form

$$H = A \sum_{m,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m,\gamma} + B \sum_{m,\tau,\gamma} a_{m,\gamma}^+ a_{m+\tau,\gamma} + U \sum_m a_{m,\uparrow}^+ a_{m,\uparrow} a_{m,\downarrow}^+ a_{m,\downarrow}.$$

Here, A is the electron energy at a lattice site, B is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience), $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \dots, \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, γ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$, and $a_{m,\gamma}^+$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. Let ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ denote the operator of forth doublet state of five-electron systems and W and m and M are the positive numbers.

Theorem 1. Let $\nu = 3$, and $U < 0$. **a).** If $U < -\frac{2B}{m}$, $m < \frac{2}{3}W$, or $U < -\frac{3B}{W}$, $m > \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of the operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is exactly the union of seven segments and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ consists of no more one point.

b). If $-\frac{3B}{W} \leq U < -\frac{2B}{m}$, $m > \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is the union of four segments and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is empty.

c). If $-\frac{2B}{m} \leq U < -\frac{3B}{W}$, $m < \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is the union of two segments and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is empty.

d). If $-\frac{2B}{m} \leq U < 0$, and $m > \frac{2}{3}W$, or $-\frac{3B}{W} \leq U < 0$, $m < \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of the operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is the single segment and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is empty.

Theorem 2. Let $\nu = 3$, and $U > 0$. **a).** If $U > \frac{3B}{W}$, $M > \frac{2}{3}W$, or $U > \frac{2B}{M}$, $M < \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of the operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is exactly the union of seven segments and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ consists of no more one point.

b). If $\frac{2B}{M} \leq U < \frac{3B}{W}$, $M > \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is the union of four segments and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is empty.

c). If $\frac{3B}{W} \leq U < \frac{2B}{M}$, $M < \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is the union of two segments and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is empty.

d). If $0 < U \leq \frac{2B}{M}$, and $M > \frac{2}{3}W$, or $0 < U \leq \frac{3B}{W}$, and $M < \frac{2}{3}W$, then the essential spectrum of the operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is the single segment and the discrete spectrum of operator ${}^4\tilde{H}_{1/2}^d$ is empty.

The linear peridynamic model in elasticity theory

Yuldasheva A.V.

M.V.Lomonosov Moscow State University Tashkent Branch

e-mail: yuasv86@mail.ru

We consider a peridynamic continuum model of periodic structure which involves the integration over the displacement field ([1,2]). A linearized peridynamic model can be described by the following integro-differential equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \int_D K(x, y)[u(x, t) - u(y, t)]dy = f(x, t), \quad x \in D, t > 0, \quad (38)$$

where $D = [-\pi, \pi]^n$, with initial values

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (39)$$

Here $u : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the unknown function, the kernel K is an $n \times n$ matrix-function with domain $D \times D$, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ are initial data, and $f : D \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is the external force ([1]).

We suppose that $n \geq 2$.

We consider the kernel

$$K(x, y) = P(x - y), \quad x \in D, y \in D,$$

where the function $P(x)$ is periodic and for $x \in D$ has the form

$$P(x) = \frac{(x \otimes x)}{|x|^{n+2}} \chi(|x|),$$

where function $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfies for some fixed ρ , $0 < \rho < \pi/2$, the following conditions:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{for } r \leq \rho, \\ 0, & \text{for } r \geq 2\rho, \end{cases}$$

and $0 \leq \chi(r) \leq 1$ for $r \in \mathbb{R}$.

References

- [1]. Albeverio S., Alimov Sh.A., On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process. Applied Mathematics and Optimization, 47, no. 1 (2008), 58-68.
- [2]. Duruk, N, Erbay, H. A., and Erkip, A., Global existence and blow-up for a class of nonlocal nonlinear Cauchy problems arising in elasticity. Nonlinearity (2010), Volume 23, Issue 1, pp. 107-118.

Statistical metric spaces

Zaitov A. A.

Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering

e-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

A statistical metric space (SM space) [1] is an ordered pair (S, F) where S is a non-null set and F is a mapping from $S \times S$ into the set of distribution functions (that is, real-valued functions of a real variable which are everywhere defined, non decreasing, left-continuous and have infimum 0 and supremum 1).

The distribution function $F(p, q)$ associated with a pair of points p and q in S is denoted by F_{pq} . Moreover, $F_{pq}(x)$ represents the probability that the "distance" between p and q is less than x .

The functions F_{pq} are assumed to satisfy the following:

- ($SM - I$) $F_{pq}(x) = 1$ for all $x > 0$ if and only if $p = q$.
- ($SM - II$) $F_{pq}(0) = 0$.
- ($SM - III$) $F_{pq} = F_{qp}$.
- ($SM - IV$) If $F_{pq}(x) = 1$ and $F_{qr}(y) = 1$, then $F_{pr}(x + y) = 1$.

The tail [2] of F_{pq} , denoted by G_{pq} , is defined by $G_{pq}(x) = 1 - F_{pq}(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$.

Let (S, F) be a statistical metric space. Then the Menger inequality is,

($SM - IVm$) $F_{pr}(x + y)T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$ holds for all points $p, q, r \in S$ and for all numbers $x, y \geq 0$ where T is a 2-place function on the unit square satisfying:

- ($T - I$) $0 \leq T(a, b) \leq 1$ for all $a, b, c \in [0, 1]$.
- ($T - II$) $T(c, d)T(a, b)$ if ca, db (monotonicity) for all $a, b, c, d \in [0, 1]$.
- ($T - III$) $T(a, b) = T(b, a)$ (commutativity) for all $a, b \in [0, 1]$.
- ($T - IV$) $T(1, 1) = 1$.
- ($T - V$) $T(a, 1) > 0$ for all $a > 0$.

An ordinary metric space is a statistical metric space such that for each pair of points p, q there exists a number $d(p, q) \geq 0$ with the property that $F_{pq}(x) = 0$ if $x < d(p, q)$, and $F_{pq}(x) = 1$ if $x \geq d(p, q)$.

Statistical metric spaces are considered with g -topologies [3].

The author could not find answers to the following questions of natural interest

Problem 1. Is the product of statistical metric spaces a statistical metric space?

Problem 2. Is the continuous image (preimage) statistical metric spaces a statistical metric space?

References

- [1]. Menger K., Statistical Metrics, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Vol. 28(1942), No. 12, P. 535–537.
 [2]. Thorp E. O., Generalized topologies for statistical metric spaces, Fund. Math., Li, 51 (1962), P. 9–21.
 [3]. Renukadevi V., Vadakasi S., Universal Journal of Mathematics and Applications, 2 (3) (2019), P. 107–115.

Отображения Пуанкаре для некоторых критических отображений окружности

Абдухакимов С.Х.

Национальный Университет Узбекистана

e-mail: asaidahmat@mail.ru

В настоящей работе мы изучаем критические гомеоморфизмы окружности. Следуя работы Остлунда и др. (см.[3]) определим пространство пар $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ критических гомеоморфизмов прямой R^1 . Для каждого $n \geq 1$ определим множество X^{cr} , состоящее из пар $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ аналитических, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой R^1 , удовлетворяющих следующим условиям:

- (a) $0 < \hat{\xi}(0) < 1$; (b) $\hat{\xi}(0) = \hat{\eta}(0) + 1$; (c) $\hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) = \hat{\eta}(\hat{\xi}(0))$; (d) $\hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) < 0, \dots, \hat{\xi}^{(n-1)}(\hat{\eta}(0)) < 0$;
 (e) $\hat{\xi}^{(n)}(\hat{\eta}(0)) > 0$; (f) $\hat{\xi}'(0) = \hat{\xi}''(0) = 0, \hat{\eta}'(0) = \hat{\eta}''(0) = 0, \hat{\xi}'''(0) \neq 0, \hat{\eta}'''(0) \neq 0$;
 (g) $(\hat{\xi} \circ \hat{\eta})'''(0) = (\hat{\eta} \circ \hat{\xi})'''(0)$.

Из условий (a), (b) и (c) вытекает, что $\hat{\eta}(0) < \hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) < \hat{\xi}(0)$. В случае $n = 1$ условия (d) и (e) опускаются.

Пусть $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in X^{cr}$. Заметим, что условия (a), (b) и (c) позволяют построить гомеоморфизм окружности $[\hat{\eta}(0), \hat{\xi}(0))$:

$$T_{\hat{\xi}, \hat{\eta}} x = \begin{cases} \hat{\xi}(x), & \text{если } x \in [\hat{\eta}(0), 0), \\ \hat{\eta}(x), & \text{если } x \in [0, \hat{\xi}(0)) \end{cases}$$

Теперь определим ренормгрупповое преобразование $R : X^{cr} \rightarrow X^{cr}$ по формуле:

$$R_n(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = (\alpha \hat{\xi}^{(n-1)}(\hat{\eta}(\alpha^{-1}x)), \hat{\xi}^{(n-1)}(\hat{\eta}(\hat{\xi}(\alpha^{-1}x))),$$

где $\alpha = \alpha(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = (\hat{\xi}^{(n-1)}(\hat{\eta}(0)) - \hat{\xi}^{(n)}(\hat{\eta}(0)))^{-1} < -1$.

Обозначим через $X^{cr}(\rho)$ подмножество X_k^{cr} , состоящее из таких пар $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$, что число вращения [1]

$$\rho(\hat{\xi}, \hat{\eta}) = \rho = [k_1, k_2, k_1, k_2, \dots] = \frac{-\sqrt{k_1}\sqrt{k_2} + \sqrt{k_1}\sqrt{k_1k_2^2 + 4k_2}}{2\sqrt{k_1}}.$$

Ренормгрупповое преобразование R_n в подмножестве $X^{cr}(\rho)$ имеет единственную гиперболическую неподвижную точку $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ (см. [2], [3],).

Времена первого возвращения $q_n = q_n(\rho), n \geq 1$, , удовлетворяют разностному уравнению

$$q_{2n+1} = k_1 q_{2n} + q_{2n-1}, \quad q_{2n} = k_2 q_{2n-1} + q_{2n-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = k_1, \quad q_2 = k_1 k_2 + 1.$$

Отображения $T^{q_{2n}}, n \geq 1$, называются отображениями Пуанкаре или отображениями первого возвращения. Следующая теорема показывает поведение отображений $T^{q_{2n}}$ и $T^{q_{2n}+q_{2n-1}}$ в ренормгрупповой окрестности $[\hat{\eta}(0), \hat{\xi}(0))$ критической точки $x_0 = 0$. Теперь сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 1. Для каждого $n \geq 1$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T^{q_{2n}}(\alpha^{-n}x) &= \alpha^{-n}\hat{\xi}(x), \quad x \in [\hat{\eta}(0), 0). \\ T^{q_{2n}+q_{2n-1}}(\alpha^{-n}x) &= \alpha^{-n}\hat{\eta}(x), \quad x \in [0, \hat{\xi}(0)). \end{aligned}$$

где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М. Наука. 1980.
- [2]. De Faria E., de Melo W. Rigidity of critical circle mappings I, Eur.Math. Soc.(JEMS). -1999. 1(4). -P.339-392.
- [3]. Ostlund R., Rand D., Sethna J., Siggia E. Universal Properties of the transition from quasi periodicity to Chaos in dissipative Systems, Physica 8D.-1983.-P.303-342.

О реактор в псевдооживленном слое

Абдурахимов А.

Ташкентский архитектурно строительный институт, Узбекистан,
e-mail: abduraximov1943@mail.ru

Проведенное исследование по промежуточным числам Пекле показало, что при разных значениях параметров задачи продольное перемешивание в изотермическом реакторе с однородным псевдооживленным слоем может как увеличивать, так и уменьшить степень превращения. Указанные исследования были основаны на однофазной модели реактора.

$$\frac{1}{P_e} \frac{d^2 C_1}{dx^2} = u_1 \frac{dC_1}{dx} + f(C_1) - A(C_1 - C_2) \quad (1)$$

$$-u_2 \frac{dC_2}{dx} = A(C_1 - C_2) \quad (2)$$

Постановка задачи. Для системы уравнений (1) и (2) граничные условия определяются аналогично условиям Данквертса в случае реактора с продольным перемешиванием:

$$\text{при } x = 0, \quad C_1 = C_2 \quad \frac{1-x}{P_e} \frac{dC_1}{dx} + C_1 = C_f;$$

$$\text{при } x = 1, \quad \frac{dC_1}{dx} = 0.$$

где P_e -число Пекле, χ -доля объема пузырей, C_f -концентрация смеси на входе реактора.

Будим считать, что скорость химической реакции в плотной фазе мала, т.е. $f(C_1) = \varepsilon f(C_1)$ (слабая химическая реакция, $\varepsilon \ll 1$).

Решение задачи (1) и (4) для концентрации реагентов на выходе из реактора с точностью до членов второго порядка малости.

Здесь обозначения принимаются как в работе [1]. В качестве примера рассмотрена автокаталитическая реакция в плотной фазе. Наибольший интерес представляет исследование влияния продольного перемешивания на степень превращения фаз в реакторе в случае когда концентрация плотной фазы в исходной смеси близка к. Зависимость степени превращения реагента как в плотной, так и в разбавленной фазе от числа Пекле рассчитанного по параметрам плотной фазы оказалось не монотонной. Полученные результаты позволили выделить области изменения параметров обеих фаз в которых продольное перемешивание оказывает различное влияние на степень превращения реагента. Найден интервал изменения коэффициента продольного перемешивания, в котором обеспечивается оптимальный режим работы химического реактора с неоднородным кипящим слоем.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Гупало Ю.П., Абдурахимов А.А., Джуманиязов К.А. Об одной модели химического реактора с неоднородным псевдооживленным слоем // ТОХТ, 1989, Т. XXII, №6. - С.772-781.

Разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом

Адашев Ж.К.

Институт Математики имени В.И.Романовского

e-mail: adashevjq@mail.ru

Алгебры Лейбница были введены в начале 90-х годов прошлого столетия французским математиком Ж.-Л.Лоде как алгебры, характеризующиеся тождеством Лейбница. Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли, и поэтому многие свойства, справедливые для алгебр Ли, продолжают на случай алгебр Лейбница.

Из классической теории алгебр Ли известно, что произвольная конечномерная алгебра Ли над полем характеристики нуль разлагается в полупрямую сумму максимального разрешимого идеала и ее полупростой подалгебры. Исследование разрешимых алгебр с нильрадикалами специальных типов связано с различными моделями физики. Таким образом, аналогично случаю алгебр Ли, изучение разрешимых алгебр Лейбница с заданными нильрадикалами является актуальной задачей.

В 1945 году А.И.Мальцев доказал, что разрешимая алгебра Ли определяется однозначно ее нильрадикалом. Далее, в 1963 году Г.М.Мубарякзянов разработал метод построения разрешимых алгебр Ли с помощью нильрадикала и ниль-независимых дифференцирований нильрадикала. Методом Мубарякзянова, в

работах [3,4] были получены описания некоторых классов разрешимых алгебр Ли. Описанию разрешимых алгебр Лейбница с некоторыми заданными нильрадикалами посвящены работы [1,2].

В данной работе мы исследуем разрешимые алгебры Лейбница с абелевым нильрадикалом.

Для произвольной алгебры Лейбница L определим ряды:

$$L^{[1]} = L, \quad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}]; \quad L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1].$$

Определение 1. Алгебра Лейбница L называется *разрешимой* (*нильпотентной*), если существует $s \in N$ такое, что $L^{[s]} = 0$ ($L^s = 0$). Минимальное число, обладающее таким свойством, называется *индексом разрешимости* (*нильпотентности*) алгебры L .

Максимальный нильпотентный (разрешимый) идеал алгебры Лейбница L называется нильрадикалом (радикалом).

Определение 2. Линейное отображение d из L в себя называется *дифференцированием*, если для любых $x, y \in L$ выполняется тождество:

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Нильпотентная алгебра Лейбница называется *характеристически нильпотентной*, если все ее дифференцирования нильпотентны.

Теперь определим понятие ниль-независимости отображения.

Линейные отображения $f_1, \dots, f_k$ называются *ниль-независимыми*, если

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_k f_k$$

не нильпотентно при всех значениях α_i , кроме нуля.

Дифференцирования вида $\mathcal{R}_x(y) = [y, x]$ называются *внутренними*.

Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница, следовательно, R можно записать как сумму векторных пространств $R = N + Q$, где N - нильрадикал в R и Q - дополняющее векторное пространство.

Предложение 1.[2] Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница. Тогда размерность Q не превышает максимального числа ниль-независимых дифференцирований N .

Известно, что разрешимая не нильпотентная алгебра Лейбница имеет характеристически не нильпотентный нильрадикал.

Обозначим через $\mathbf{a}_n$ - n -мерные абелевы алгебры. Для разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $\mathbf{a}_n$ и размерностью дополняющего пространства равной s , мы будем использовать обозначение $R(\mathbf{a}_n, s)$.

Далее мы рассмотрим разрешимые алгебры Лейбница с n -мерными абелевыми нильрадикалами.

Теорема 1. Пусть $R(\mathbf{a}_n, s)$ - разрешимая алгебра Лейбница с абелевым нильрадикалом $\mathbf{a}_n$ и размерность дополняющего пространство к нильрадикалу равно s . Тогда существует базис $R(\mathbf{a}_n, s)$, такой что все операторы $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_k}}$, $1 \leq i \leq s$ можно представить одновременно в виде жордановой формы.

Пусть L - алгебра Лейбница из класса $R(\mathbf{a}_n, s)$. Возьмем базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x_1, x_2, \dots, x_s\}$ из L такой, что $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является базисом нильрадикала $\mathbf{a}_n$ и $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ является базисом дополнительного векторного пространства Q . Известно, что операторы правого умножения

$\mathcal{R}_{x_1|_{\mathbf{a}_n}}, \mathcal{R}_{x_2|_{\mathbf{a}_n}}, \dots, \mathcal{R}_{x_s|_{\mathbf{a}_n}} : \mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a}_n$ являются ниль-независимыми дифференцированиями и существует базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в $\mathbf{a}_n$ такой, что операторы $\mathcal{R}_{x_1|_{\mathbf{a}_n}}, \mathcal{R}_{x_2|_{\mathbf{a}_n}}, \dots, \mathcal{R}_{x_s|_{\mathbf{a}_n}}$ имеют жордановы нормальные формы, одновременно.

Из этого мы имеем:

$$\begin{cases} [e_t, x_i] = \lambda_{t,t}^i e_t + \lambda_{t,t+1}^i e_{t+1}, & 1 \leq t \leq n-1, 1 \leq i \leq s, \\ [e_n, x_i] = \lambda_{n,n}^i e_n & 1 \leq i \leq s, \end{cases}$$

где $\lambda_{t,t}^i$ -собственные значения оператора $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_k}}$ и $\lambda_{t,t+1}^i \in \{0, 1\}$.

Лемма 1. Пусть $\lambda_{t,t+1}^i = 1$ для некоторого t . Тогда $\lambda_{t,t}^i = \lambda_{t+1,t+1}^i$ для всех i .

Пусть $\{\lambda_{1,1}^{(i)}, \lambda_{2,2}^{(i)}, \dots, \lambda_{n,n}^{(i)}\}$ - собственные значения операторов, соответствующих $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq s$.

Рассмотрим векторы $\alpha_i = (\lambda_{1,1}^{(i)}, \lambda_{2,2}^{(i)}, \dots, \lambda_{n,n}^{(i)})$ ($1 \leq i \leq s$) n -мерного векторного пространства $\mathbb{C}^n$. Поскольку $\text{Der}(\mathbf{a}_n) \cong M_n(\mathbb{C})$ и ниль-независимые дифференцированиями являются $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq s$. Максимальное число ниль-независимых векторов среди α_i , $1 \leq i \leq s$ равно n . Это означает, что максимальная размерность дополняющего пространства равна n , т.е. $s \leq n$.

Теорема 2. Пусть $R(\mathbf{a}_n, s)$ - разрешимая алгебра Лейбница. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$n - s \geq m,$$

где m - это число t , такое, что $\lambda_{t,t+1}^i = 1$ для некоторого i .

Следствие 1. Пусть $R(\mathbf{a}_n, n)$ -разрешимая алгебра Лейбница. Тогда операторы $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq n$ имеют следующие формы:

$$\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}} = \text{diag}\{J_1(\lambda_1^i), J_1(\lambda_2^i), \dots, J_1(\lambda_n^i)\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где матрица $J_k(\lambda_t^i)$ является жордановым блоком порядка k , соответствующим собственному значению λ_t^i .

Следствие 2. Пусть $R(\mathbf{a}_n, n-1)$ - разрешимая алгебра Лейбница. Тогда операторы $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq n-1$ имеют одну из следующих форм:

$$\text{diag}\{J_1(\lambda_1^i), J_1(\lambda_2^i), \dots, J_1(\lambda_n^i)\} \quad \text{или} \quad \text{diag}\{J_2(\lambda_1^i), J_1(\lambda_2^i), \dots, J_1(\lambda_{n-1}^i)\},$$

где матрица $J_k(\lambda_t^i)$ является жордановым блоком порядка k , соответствующим собственному значению λ_t^i .

Теорема 3. В алгебре $R(\mathbf{a}_n, s)$ существует базис $\{x_1, \dots, x_s, e_1, \dots, e_n\}$ из $R(\mathbf{a}_n, s)$ такой, что действия операторов правых умножений $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq s$ на элементах $\{e_{t_1}, e_{t_2}, \dots, e_{t_s}\}$ из $\mathbf{a}_n$ выражаются следующим образом:

$$\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}(e_{t_i}) = e_{t_i} + \alpha_{i,i} e_{t_i+1}, \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$\mathcal{R}_{x_j|_{\mathbf{a}_n}}(e_{t_i}) = \alpha_{i,j} e_{t_i+1}, \quad 1 \leq i \neq j \leq s,$$

где $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_s \leq n$.

Следствие 3. В алгебре $R(\mathbf{a}_n, n)$ существует базис $\{x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_n\}$ такой, что действия операторов правых умножений $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq n$ на $\mathbf{a}_n$ выражаются следующим образом:

$$\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}(e_i) = e_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

где отсутствующие действия равны нулю.

Следствие 4. В алгебре $R(\mathbf{a}_n, n-1)$ существует базис $\{x_1, \dots, x_n, e_1, \dots, e_n\}$ такой, что действия операторов правых умножений $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}$, $1 \leq i \leq n-1$ на $\mathbf{a}_n$ выражаются следующим образом:

1. $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}(e_i) = e_i$, $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}(e_n) = \alpha_i e_n$, $1 \leq i \leq n-1$,
2. $\mathcal{R}_{x_1|_{\mathbf{a}_n}}(e_1) = e_1 + \alpha_1 e_2$, $\mathcal{R}_{x_1|_{\mathbf{a}_n}}(e_2) = e_2$, $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}(e_1) = \alpha_i e_2$, $\mathcal{R}_{x_i|_{\mathbf{a}_n}}(e_{i+1}) = e_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$ and $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$,

где отсутствующие действия равны нулю.

Литература

- [1]. E.M. Cañete, A. Kh. Khudoyberdiyev *The classification of 4-dimensional Leibniz algebras*. Lin. Alg. Appl., vol. 439(1), 2013, p. 273–288.
- [2]. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov *Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical*. Lin. Multilin. Algebra, vol. 61(6), 2013, p. 758–774.
- [3]. J.C. Ndogmo, P. Winternitz *Solvable Lie algebras with abelian nilradicals*. J. Phys. A, vol. 27(2), 1994, p. 405–423.
- [4]. S. Tremblay, P. Winternitz *Solvable Lie algebras with triangular nilradicals*. J. Phys. A, vol. 31(2), 1998, p. 789–806.

Свойства полулинейного дифференциального уравнения второго порядка

Алдай М.

ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

e-mail: saiajan@yandex.kz

Пусть $\mu, \gamma \in R, \alpha > 0$,

$$t^\mu (|y'(t)|^{p-2} y'(t))' + \alpha t^\gamma |y(t)|^{p-2} y(t) = 0, t > 0, \quad (1)$$

$$\int_0^\infty (t^\mu |y'(t)|^p - \alpha t^\gamma |y(t)|^p) dt \geq 0, y \in \overset{\circ}{W}_p^1(0, \infty). \quad (2)$$

(2) неравенство является необходимым и достаточным условием бесопряженности уравнения (1) на интервале $(0, \infty)$. Пусть $\mu < p-1$, тогда $\forall c > 0$, $\int_0^c t^{(1-p')\mu} dt < \infty$, $\int_0^\infty t^{(1-p')\mu} dt = \infty$, по Теореме А [1] $\overset{\circ}{W}_p^1(0, \infty) = \overset{\circ}{W}_{p,l}^1(0, \infty) = \{f \in W_p^1(0, \infty) : f(0) = 0\}$.

Тогда из (2)

$$\int_0^\infty t^\mu |y'(t)|^p dt \geq \alpha \int_0^\infty t^\gamma |y(t)|^p dt, y(0) = 0. \quad (3)$$

Положим $y'(t) = f(t)$, $y(0) = 0 \Rightarrow y(t) = \int_0^t f(s)ds$. Подставляя в (3), получим

$$\int_0^\infty t^\gamma \left| \int_0^1 f(s)ds \right|^p dt \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty t^\mu |f(t)|^p dt. \quad (4)$$

Теперь рассмотрим неравенство Харди $\int_0^\infty t^\gamma \left| \int_0^t f(s)ds \right|^p dt \leq C \int_0^\infty t^\mu |f(t)|^p dt$. пусть $\gamma = \mu - p$.

Тогда $\int_0^\infty \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(s)ds \right|^p t^\mu dt \leq C \int_0^\infty t^\mu |f(t)|^p dt$ (5) по теореме Харди [2] наименьшая константа $C = \left(\frac{p}{p-\mu-1} \right)^p$. При $\mu < 1-p$, $\gamma = \mu - p$ (4) неравенство выполняется, тогда и только тогда, когда $\frac{1}{\alpha} \geq \left(\frac{p}{p-\mu-1} \right)^p$, то есть, если выполняется $\alpha \leq \left(\frac{p-\mu-1}{p} \right)^p$. Если $\alpha > \left(\frac{p-\mu-1}{p} \right)^p$, то не выполняется (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2).

Поэтому $\alpha \leq \left(\frac{p-\mu-1}{p} \right)^p$ и при $\gamma = \mu - p$, $\mu < 1 - p$ в выполняется неравенство (2), отсюда уравнение (1) бессопряженно на интервале $(0, \infty)$, и тогда уравнение (1) будет неосцилляторным.

Если, при $\alpha > \left(\frac{p-\mu-1}{p} \right)^p$, $\gamma = \mu - p$, $\mu < 1 - p$, то уравнение (1) будет осцилляторным. При любом $\alpha > 0$ по неравенству Харди неравенство $\int_a^\infty \left| \frac{1}{t} \int_a^t f(s)ds \right|^p t^\mu dt \leq \left(\frac{p}{p-\mu-1} \right)^p \int_a^\infty t^\mu |f(t)|^p dt$ выполняется с наименьшей константой $\left(\frac{p}{p-\mu-1} \right)^p$. При выполнении условия (6) уравнение (1) для любого $a > 0$, на интервале (a, ∞) сопряженно, а это значит что уравнение (1) осцилляторно. Отсюда вытекает, что при выполнении условия (6), уравнение (1) осцилляторно.

Список литературы

[1]. A.Kalybay, D. Karatayeva, *An extended discrete weighted Hardy inequality in the difference form* // AIP Conference Proceedings. - 2017. - V. 1880, 030012. - doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.5000611>

О дзета-функции Римана, ее топологических свойствах и обобщениях

Г. Аманкелдиева, М. В. Долгополов

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами
443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.
e-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com

Рассматривается дзета-функция Римана, ее аналитические и топологические свойства, области ее применения. Хорошо известно, что ряд простых чисел бесконечен и пока не представлена обоснованная закономерность, описывающая

распределения простых чисел среди натуральных. Но Риман обнаружил, что количество простых чисел не превосходящих x – функция распределения простых чисел – выражается через распределения нетривиальных нулей дзета-функции. При этом функция определяется на комплексной плоскости. Она может быть представлена в виде ряда, в виде функционального уравнения, а также явным выражением. Интересным представляется описание геометрическое дзета-функции, в том числе, так называемой критической линии. Асимптотическое разложение имеет широкий спектр приложений.

Дзета-функция Римана и ее обобщения играют важную роль не только в аналитической теории чисел, а имеют также приложения в теоретической физике. Полюсы функции определяют перенормировку в моделях квантовой теории поля. В работе рассмотрены доказательства ряда разложений с использованием дзета-функции Римана. Определены представления на примерах топологических поверхностей.

О внутренней геометрии поверхности в Галилеевом пространстве

Артикбаев А.

*Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
e-mail: aartykbaev@mail.ru*

Внутренней геометрией поверхности считаются те свойства поверхности, которые не меняются при изгибании поверхности. «Изгибание» связаны с наглядным представлением о поверхности как гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленке.

Так как галилеева пространства надстраивается на аффинном пространстве A_3 многие геометрические величины будут одинаковыми с евклидовой геометрией. Но вырожденность метрики галилеева пространства требует нового подхода к внутренней геометрии поверхности.

Известно [1], что при изгибании поверхности в евклидовом пространстве внутренняя геометрия поверхности сохраняется. Все геометрические величины поверхности связанные с ее первой квадратичной формой относятся к внутренней геометрии поверхности. Внутренняя геометрия поверхности достаточно богата, поэтому на ее основе появляется «Риманова геометрия» в которой изучена свойства поверхностей с данной метрикой.

В трехмерном случае в декартовой системе координат $Oxyz$ можно рассматривать специфику внутренней геометрии поверхности в классе поверхностей F с краем и однозначной проекцией в односвязную область D на координатной плоскости Oxy .

Следующее преобразование

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = f_1(x) + y \cos \phi - z \sin \phi + b \\ z' = f_2(x) + y \sin \phi + z \cos \phi + b \end{cases}$$

при произвольных дифференцируемых $f_1(x)$ и $f_2(x)$ сохраняет все инварианты, связанные с метрикой. Очевидно, этим преобразованием прямая $y = z = 0$ можно совместить со всякой кривой γ , которая не имеет больше одной точки пересечения с особыми плоскостями пространства.

Даже классическая теорема А.В.Погорелова [2], о неизгибаемости сферы в евклидовом пространстве, не сохраняется в галилеевом пространстве.

В евклидовом пространстве теория внутренней геометрии выпуклых поверхностей построена в монографии А.Д.Александрова [1]. Определена внутренняя метрика выпуклой поверхности, изучены свойства многогранников связанных с внутренней геометрией. Вся теория основана на евклидовом расстоянии между точками.

Хотя все геометрические объекты, связанные с выпуклой поверхностью галилеева пространства, одинаковы с евклидовой геометрией, но то, что связано измерением расстояний существенно отличается. Это связано с вырожденностью расстояния между точками галилеева пространства [3].

Поэтому кратчайшая в галилеевом пространстве определяется по иному.

Определение. *Кратчайшая между двумя точками на поверхности - путь соединяющая данные точки имеющая наименьшую угол поворота.*

Теорема 1. *На поверхности, не имеющей особой опорной плоскости, две точки, не лежащие на одной особой плоскости соединимы кратчайшей.*

Аналогично евклидовому пространству на поверхности определяется треугольник, как кратчайшие соединяющие три точки поверхности.

Теорема 2. *Сумма внутренних углов треугольника на выпуклой поверхности положительна.*

Теоремы доказываются методом А.Д.Александрова [1], где используется последовательность выпуклых многогранников, стремящейся к выпуклой поверхности.

Литература

[1] А.Д.Александров, Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – Москва-Ленинград: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.

[2] А.В.Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. – Москва: «Наука», 1969.

[3] А.Артикбаев, Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени, Т.: Фан, 1991.

О применении решения уравнение Монжа-Ампера в экономике

Артикбаев А., Исмоилов Ш.Ш.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта

Национальный Университет Узбекистана

e-mail: aartykbaev@mail.ru, Ismoilovsh94@mail.ru

В работе [1] изучено существование и единственность решения уравнение Монжа-Ампера в классе гомотопических функций. Доказана следующая теорема.

Лемма. Каждая линейно однородная функция, удовлетворяет однородное уравнение Монжа-Ампера.

Теорема. Пусть F – функция с $F : F(x, y)$, $\Delta(f_{ij}) = 0$ а $h(x, y)$ однородная функция. Тогда $f = F(h(x, y))$ – удовлетворяет однородное уравнение Монжа-Ампера $\det(f_{ij}) = 0$ тогда и только тогда когда:

1) Внутренняя функция h имеет вид $(ax + by)d$ для некоторых констант a, b или

2) С точностью до константы $f(x, y)$ является линейно однородной функцией.

Полученные результаты применены для решений задачи экономики. Когда товары, которые полностью взаимозаменяемы, они могут быть характерными оценивается как товары, имеющие постоянную норму замещения. Математически, производственная функция является идеальной заменой, если она имеет вид;

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

для некоторых ненулевых констант $a_1, a_2, \dots, a_n$. Далее это функция отождествляется с графиком

$$G(f) = (x_1, x_2, \dots, x_n, f)$$

которая представляет количество продукции.

Отсюда многие важные свойства производственных функций в экономике, интерпретируются в терминах геометрии.

Следствие. Наконец для производящей функции $f(x, y) = F(h(x, y))$ — доказано, что оно является гомотопической производной функцией тогда и только тогда когда:

- 1) $f(x, y)$ - линейно однородно или
- 2) $F(u)$ - строго возрастающая функция, и $h(x, y)$ идеальная замена.

Литература

- [1]. Bang-Yen Chen, Solutions to homogeneous Monge-Ampere equations of homothetic functions and their applications to production model in economics//Journal of Mathematical Analysis and Applications. (2014) - 223-229 p.
- [2]. Артыкбаев А., Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве//Математический сборник, 1982.
- [3]. А.Артыкбаев, Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве - времени, Т.: Фан, 1991.
- [4]. А.Артыкбаев Ш.Исmoilов, Двойственные поверхности изотропного пространства//«Математика, механика и информатика фанларининг ривожиди истедодли ешларнинг урни» илмий-амалий семинар тезислар туплами. УЗМУ, Тошкент-2018.

Компактная открытая топология

Атоева Мухаббат

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
e-mails: atoyevamuhabbat99@gmail.com

Семейство λ непустых подмножеств топологического пространства X называется π -сетью, если для любого непустого открытого подмножества U пространства X найдется элемент семейства λ , лежащий в множестве U . Будем рассматривать компактный π -сети, т. е. π -сети, элементы которых-компактные множества.

Пусть X и Y – топологические пространства. Для $F \subset X$ и $V \subset Y$ обозначим $O(F, V) = \{g : g \in C(X, Y), g(F) \subset V\}$.

Для π -сети λ топологического пространства X обозначим B_λ семейство всех множеств вида $O(X, Y)$, где $F \in \lambda$, V – произвольное открытое подмножество Y . Обозначим $C_\lambda(X, Y)$ топологическое пространство, точки которого – элементы множества $C(X, Y)$, а семейство B_λ предбазу топологии.

Обозначим через $\lambda_1 = \{F : |F| < \aleph_0 : F\text{–компакт в } X\}$

Теорема.. Пусть X, Y пространства со счетной базой. Тогда $|C_{\lambda_1}(X, Y)| \leq \aleph_1$.

Список литературы

В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. «Общая топология. Основные конструкции», 2014.

О структуре множества субмерсий

Байтураев А.М., Аннаев Н.У.

Ташкент, Национальный университет Узбекистана

ТАСИ

e-mail: abayturaev@mail.ru, nuriddin.annayev.91@mail.ru

В этой работе изучается введение в множество отображений многообразия M в N топологию. Получено результат, что множество субмерсий, является открытым множеством в топологическое пространство, получающееся при введении топологии.

Множество всех C^r -гладких отображений $f : M \rightarrow N$ обозначим через $C^r(M, N)$, где M, N – гладкие многообразия класса C^r . Предположим, что $r = 0, 1, 2, \dots$

Слабая топология (C^r -компактно-открытая топология) в $C^r(M, N)$ порождается множествами, определяемыми следующим образом.

Пусть $f \in C^r(M, N)$ и пусть $(\varphi, U), (\psi, V)$ – карты многообразий M, N . Пусть, далее, $K \subset U$ – компактное множество, такое, что $f(K) \subset V$ пусть, $0 < \varepsilon < \infty$.

Предбазисную окрестность

$$\mathfrak{N}(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \varepsilon) \quad (1)$$

слабой топологии определяется как множество таких C^r -отображений $g : M \rightarrow N$ что $g(K) \subset V$ и для любых $x \in \varphi(K), k = 0, \dots, r$

$$\|D^k(\psi f \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g \varphi^{-1})(x)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что локальные представления отображений f, g вместе с их первыми r производными различаются не более, чем на ε в каждой точке компактного множества K .

Слабая топология в $C^r(M, N)$ порождается множествами (1); этим определяется топологическое пространство $C_W^r(M, N)$. Окрестностью точки f по отношению к этой топологии является, таким образом, всякое множество, содержащее пересечение конечного числа множеств типа (1).

Пространство $C_W^r(M, N)$ обладает плотную метрику и счетную базу, в случае компактного M оно локально стягиваемо. Однако если M не компактно, то

слабая топология недостаточно хорошо контролирует поведение отображений на бесконечности. Для этой цели более подходит сильная топология. База этой топологии состоит из множеств следующего типа. Пусть $\Phi = \{\varphi_i, U_i\}_{i \in A}$ - локально конечное множество карт многообразия M , $K = \{K_i\}_{i \in A}$ - семейство компактных подмножеств многообразия M с $K_i \subset U_i$, $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in A}$ - семейство карт многообразия N и $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}_{i \in A}$ - семейство положительных чисел. Если отображение $f \in C^r(M, N)$ переводит каждое K_i в V_i мы определяем сильную базисную окрестность

$$\aleph(f; \Phi, \Psi, K, \varepsilon) \quad (2)$$

как множество таких C^r -отображений $g : M \rightarrow N$ что для каждого $i \in A$, $g(K_i) \subset V_i$ и для любых $x \in \varphi_i(K_i)$, $k = 0, \dots, r$

$$\|D^k(\psi_i f \varphi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i g \varphi_i^{-1})(x)\| < \varepsilon_i.$$

Сильная топология в $C^r(M, N)$ порождается множествами (2); этим определяется топологическое пространство $C_S^r(M, N)$.

Определение. Дифференцируемое отображение $f : M^m \rightarrow N^n$ класса C^r ранг которого в каждой точке из M^m равен m называется C^r -субмерсией.

Теорема. Множество субмерсий является открытым подмножеством пространства $C_S^r(M, N)$ при $1 \leq r \leq \infty$.

Литература

- [1]. Бакельман И.Я., Вернер А.А., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию "в целом". - М.: Наука, 1973 г.
- [2]. Тамура И. Топология слоений. - Москва, "Мир" 1979 г.
- [3]. Хирш М. Дифференциальная топология. -Москва, "Мир" 1979 г.

$exp_n X$ - пространства и cs -сеть

Бешимова Д.Р., Умарова У.У., Бешимова Ш.Х.

Бухарский государственный университет

e-mail: diloromxon1608@mail.ru

В работе доказывается, что cs -сеть бесконечного пространства, его гиперпространства и симметрическая степень равны. Рассмотрим уравнение

Определение 1. Семейство $R = \{M_s : s \in S\}$ подмножеств топологического пространства X называется сетью пространства X , если для каждой точки $x \in X$ и каждой окрестности U точки x , найдется такое $s \in S$, что $x \in M_s \subset U$. Если R состоит только из открытых множеств, то R называется базой топологического пространства X [1,2].

Определение 2. Пусть R - семейство подмножеств пространства X и $\tau(X)$ топология на X . Семейство R называется cs -сетью в точке $x \in X$, если для всякой последовательности $\{x_n\}$ сходящейся к точке $x \in U$, где $U \in \tau(X)$ существуют $m \in N$ и $P \in R$ такие, что $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P \subset U$. Топологическое T_1 -пространство

X называется cs -сетью, если X имеет cs -сеть в каждой точке. Пусть X бесконечное T_1 -пространство. cs -сеть топологического пространства X обозначается через $cs(X)$ [3].

Теорема. Пусть X бесконечное T_1 -пространство. Тогда $cs(X) = cs(exp_n X)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986.-752 с.
- [2]. Федорчук В.В., Филипов В.В. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Математика, кибернетика// 1989.-332 с.
- [3]. Li, Zhaowen; Lin, Fucan; Liu, Chuan. Networks on free topological groups. Topology and its applications//180, 186-198 (2015).

Топологическое пространство с конечной топологией

Бешимова Д.Р., Яздонов Д.Э.

*Бухарский государственный университет, Национальный университет
Узбекистана имени Мирзо Улугбека
e-mail: diloromxon160885@mail.ru*

Пусть X - бесконечное множество и $\tau_k = \{U \subset X : X \setminus U \text{ конечно или } U = \emptyset\}$. Условимся называть τ_k конечной топологией на X . В работе [1] показано, что τ_k топология на X , (X, τ_k) есть T_1 - пространство и (X, τ_k) компактно и сепарабельно. В нашей работе мы приведем некоторые свойства пространства (X, τ_k) с конечной топологией.

Множество $A \subset X$ называется всюду плотным в X , если $[A] = X$. Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где A - всюду плотное подмножество пространства X . Это кардинальное число обозначается $d(X)$. Если $d(X) \leq \aleph_0$, то говорят, что пространство X сепарабельно. Топологическое пространство X называется слабо сепарабельным, если в X существует π - база, распадающаяся на счетное число центрированных систем открытых множеств. Семейство $B(x)$ окрестностей точки x называется базой топологического пространства X в точке x , если для любой окрестности V точки x существует такой элемент $U \in B(x)$, что $x \in U \subset V$. Характер [2] точки x в топологическом пространстве X есть наименьшее кардинальное число вида $|B(x)|$, где $B(x)$ - база X в точке x ; это кардинальное число обозначается $\chi(x, X)$. Характер [1] топологического пространства X есть точная верхняя грань всех кардинальных чисел $\chi(x, X)$ для $x \in X$; это кардинальное число обозначается $\chi(X)$. Если $\chi(X) \leq \aleph_0$, то говорят, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности. Псевдохарактер [1] T_1 - пространства в точке x определяется как наименьший кардинал $|\lambda|$, где λ - семейство открытых в X множеств такое, что $\bigcap \lambda = \{x\}$; этот кардинал обозначается через $\psi(x, X)$. Псевдохарактер [1] T_1 - пространства X определяется как супремум всех кардиналов $\psi(x, X)$, где $x \in X$; этот кардинал обозначается через $\psi(X)$. Ясно, что $\psi(x, X) \leq \chi(x, X)$ и $\psi(X) \leq \chi(X)$ для каждого T_1 - пространства X и любого $x \in X$. Если X - компакт, то $\psi(x, X) = \chi(x, X)$ для всех $x \in X$ и $\psi(X) = \chi(X)$.

Теорема. Пусть X бесконечное множество и $\tau_k = \{U \subset X : X \setminus U \text{ конечно или } U = \emptyset\}$ есть топология на пространстве X . Тогда

- 1) (X, τ_k) слабо сепарабельно и удовлетворяет условию Суслина;
- 2) Характер и псевдохарактер пространства (X, τ_k) есть $\chi(X, \tau_k) = \psi(X, \tau_k) = |X|$.

Список литературы

- [1]. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции, Москва, 2014.
- [2]. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. Москва: Наука. 1974. - 424 с.

Многомерная группа Дженнинга

Богатый С.А.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
e-mail: bogaty@inbox.ru

В 1954 году Jennings ввел в широкое изучение группу $J(\mathbf{k})$ формальных степенных рядов $f(x) = x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$ с коэффициентами в коммутативном кольце $\alpha_n \in \mathbf{k}$, – в качестве операции рассматривается композиция. В случае поля $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_p$ группа $J(\mathbb{Z}_p)$ обладает свойством универсальности по вложению счетных p -групп и называется Ноттингемской группой. Для колец $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_p$, $p \geq 3$ (топологические) коммутаторы групп Дженнинга существенно отличаются [1].

В докладе рассматривается многомерный аналог группы Дженнинга и показывается, что задача описания (топологического) коммутатора приводит к ответу несколько иному, чем в одномерном случае.

Theorem 1. Коммутатором одномерной группы Дженнинга $J(\mathbb{Z}_2)$ является подгруппа всех таких рядов, что $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7$.

Theorem 2. Коммутатором n -мерной группы Дженнинга $J_n(\mathbb{Z}_2)$ при $n \geq 2$ является подгруппа всех таких формальных отображений $F : (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$, отображение сдвига которых $F - \text{Id}$ начинается с мономов степени ≥ 4 , т.е. что $\alpha_{i_1 \dots i_n} = 0$ при $i_1 + \dots + i_n = 2$ и $i_1 + \dots + i_n = 3$.

[1] Bogataya S.I., Bogaty S.A. Series of commutants of the Jennings group $J(\mathbb{Z}_2)$. Topology and Appl. 2014. **169**. 136–147.

Индекс произвольного вещественного подфактора W^* -алгебры

Болтаев Х.Х.

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
e-mail: bkhabibzhan2020@mail.ru

Пусть H – комплексное гильбертово пространство, $B(H)$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H . Слабо замкнутая $*$ -подалгебра $M \subset B(H)$ с единицей $\mathbf{1}$ называется W^* -алгеброй. Множество $M' = \{x \in$

$B(H) : xy = yx, \forall y \in M$ называется коммутантом $*$ -алгебры M . Вещественная $*$ -подалгебра $R \subset B(H)$ называется вещественной W^* -алгеброй, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$.

Для вектора $\xi \in H$ рассмотрим следующие проекторы:

$$e_\xi : H \rightarrow \overline{R'\xi}, \quad e'_\xi : H \rightarrow \overline{R\xi}, \quad f_\xi : H \rightarrow \overline{M'\xi} \quad \text{и} \quad f'_\xi : H \rightarrow \overline{M\xi}.$$

Утверждение. Парные константы Неймана-Мюррея для алгебр R и M совпадают:

$$\frac{\overline{\tau}(f_\xi)}{\overline{\tau}'(f'_\xi)} = \frac{\tau(e_\xi)}{\tau'(e'_\xi)},$$

причем это число не зависит от вектора ξ и обозначается $\dim_R(H_r) = \dim_M(H)$.

Определение 1. Пусть R – конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ – подфактор. Индексом Q в R называется число $\dim_Q(L^2(R))$, которое обозначается как $[R : Q]$.

Теорема 1. Индекс вещественного подфактора совпадает с индексом обертывающего подфактора:

$$\dim_Q(L^2(R)) = \dim_{Q+iQ}(L^2(R+iR)), \quad \text{т.е.} \quad [R : Q] = [R+iR : Q+iQ].$$

Теорема 2. Пусть R – конечный вещественный фактор и Q – подфактор R . Тогда

$$[R : Q] \in \left\{ 4 \cos^2 \frac{\pi}{q} : q \geq 3 \right\} \cup [4, +\infty].$$

Определение 2. Пусть R – σ -конечный вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ – подфактор. Положительное линейное отображение $E : R \rightarrow Q$ называется *условным ожиданием*, если выполняются следующие условия:

- (i) $E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;
- (ii) $E(E(x)y) = E(x)E(y) = E(xE(y))$;
- (iii) $E(x)^*E(x) \leq E(x^*x), \quad \forall x, y \in R$.

Пусть $E : R \rightarrow Q$ – нормальное условное ожидание. Продолжение E на W^* -алгебру $M = R + iR$ мы обозначим как $\overline{E}$ (см. [4, Теорема 1]). Так как отображение E является операторно-значным весом, то по следствию 1 ему соответствует некоторое отображение $E^{-1} \in P(Q', R')$. По доказательству теоремы 4 нетрудно заключить, что $\overline{E}^{-1} = \overline{E^{-1}}$. Кроме того, для любых унитарных элементов $u \in R'$ и $v \in M'$ имеем

$$uE^{-1}(\mathbf{1})u^* = E^{-1}(u\mathbf{1}u^*) = E^{-1}(\mathbf{1}) \quad (40)$$

$$v\overline{E}^{-1}(\mathbf{1})v^* = \overline{E}^{-1}(v\mathbf{1}v^*) = \overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) \quad (41)$$

По определению имеем $\overline{E}(\mathbf{1}) = E(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Однако, в общем случае, $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$. В силу (3) и (4) элемент $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ принадлежит центру алгебры. Так как центры алгебр R и M тривиальны, то элемент $\overline{E}^{-1}(\mathbf{1}) = E^{-1}(\mathbf{1})$ скалярно кратен $\mathbf{1}$, т.е. $E^{-1}(\mathbf{1}) = \lambda\mathbf{1}$ (возможно и $\lambda = +\infty$).

Определение 3. Скалярное число λ называется индексом вещественного подфактора Q на вещественном факторе R и обозначается $[R : Q]$ или $[(M, \alpha) : (N, \alpha)]$.

Теорема 3. Пусть R – σ -конечный вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ – подфактор. Тогда $[R : Q] = [R + iR : Q + iQ]$.

Следствие. Пусть R – σ -конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ – подфактор. Тогда $[R : Q] = 4 \cos^2(\pi/q)$ ($q \geq 3$) или $[R : Q] \geq 4$.

Равномерные структуры и Хьюитовские расширения

Борубаев А.А., Намазова Г.О.

Институт математики НАН Кыргызской Республики
e-mail: fiztech-07@mail.ru, guliza_n@mail.ru

Абстракт. В работе рассматриваются равномерные аналоги вещественно полных расширений тихоновских пространств посредством равномерных структур. Класс вещественно полных пространств является одним из основных классов топологических пространств.

Теорема Для каждого равномерного пространства (X, U) существует ровно одно (с точностью до равномерного гомеоморфизма) равномерно вещественно полное пространство $(\mathcal{V}_U X, \mathcal{V}_U)$ обладающими следующими свойствами:

1. Существует равномерно гомеоморфное вложение $i : (X, U_F) \rightarrow (\mathcal{V}_U X, \mathcal{V}_U)$ для которого $(\mathcal{V}_U X, \mathcal{V}_U)$ является пополнением равномерного пространства (X, U_F) , где U_F -максимальная функциональная равномерность, содержащихся в U .

2. Какова бы ни была равномерно непрерывная функция $f : (X, U) \rightarrow (R, E_R)$, найдется равномерно непрерывная функция $\tilde{f} : (\mathcal{V}_U X, \mathcal{V}_U) \rightarrow (R, E_R)$ такая, что $\tilde{f} \circ i = f$.

Пространства $(\mathcal{V}_U X, \mathcal{V}_U)$ удовлетворяет также условию:

3. Для каждого равномерно непрерывного отображения $f : (X, U) \rightarrow (Y, \mathfrak{M})$ равномерного пространства (X, U) в произвольное равномерно вещественно полное пространство $(Y, \mathfrak{M})$ найдется равномерное отображение $\tilde{f} : (\mathcal{V}_U X, \mathcal{V}_U) \rightarrow (Y, \mathfrak{M})$, такое, что $\tilde{f} \circ i = f$.

Пример. Пусть R -пространство действительных чисел. Через E_R – обозначим естественную равномерность пространства R , E_F -максимальную функциональную равномерность на R , а также через E_P – максимальную предкомпактную равномерность на R , содержащихся в E_R . Тогда $E_P \neq E_R$ и $E_R \neq E_F$. Первое неравенство следует, из-того, что E_P -неполная равномерность, а E_R - полная равномерность. Второе неравенство следует из-того, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна на R , но не является равномерно непрерывной на (R, E_R) . Поэтому существует равномерное покрытие $\alpha \in E_R$ такое, что $f^{-1}\alpha \in E_R$, но по построению E_F покрытие $f^{-1}\alpha \in E_F$. Поэтому $E_R \neq E_F$ равномерные пространства (R, E_F) и (R, E_R) являются равномерно вещественно компактными пространствами, а (R, E_R) – не является равномерно вещественно компактным.

Литература.

1. Edwin Hewitt Rings of real-valued continuous functions I. Transactions of the American Mathematical Society 64(1948), 45-99.
2. Энгелькинг Р. Общая топология Москва: Мир, 1986. - 752 с.
3. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек, Издательство "Илим" 2013.

4.Апарина Л.В. Хьюитовские расширения близостных и равномерных пространств. Сибирский матем. журн.-1974. -Т.15-№4-С.707-729.

Категорные методы в равномерной топологии

Борубаев А.А.

Институт математики НАН Кыргызской Республики

e-mail: fiztech-07@mail.ru

В докладе на категорию $Unif(Y, \mathcal{V})$ обобщаются известные факторизационные теоремы С.Мардешича, фундаментальные результаты Б.А.Пасынкова, А.В. Зарелуа об универсальном компакте веса τ и размерности n , результаты В.Кульпы, а также спектральная теорема Е.В. Щепина и другие.

Пусть $(Y, \mathcal{V})$ —произвольное равномерное пространство. Рассмотрим категорию $Unif(Y, \mathcal{V})$, объектами которой являются равномерно непрерывные отображения $f : (X, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ произвольного равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ на фиксированное равномерное пространство $(Y, \mathcal{V})$, где $\mathcal{U}_f$ —фиксированная база отображения f . Морфизмами из объекта $f : (X, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ в объект $g : (Z, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_g) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ являются такие (предполагаемые "на") отображения $h : (X, \mathcal{U}, \mathcal{U}_f) \rightarrow (Z, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_g)$, что, во-первых, отображение $h : (X, \mathcal{U}_f) \rightarrow (Z, \mathfrak{M}_g)$ псевдопавномерного пространства $(X, \mathcal{U}_f)$ в псевдоравномерное пространство $(Z, \mathfrak{M}_g)$ является равномерно непрерывным и, во-вторых, $f = g \cdot h$.

Теорема 1. (Факторизационная теорема). Пусть $h : f \rightarrow g$ —морфизм категории $Unif(Y, \mathcal{V})$. Тогда существуют такой объект φ и такие морфизмы $h_1 : f \rightarrow \varphi$ и $h_2 : \varphi \rightarrow g$ категории $Unif(Y, \mathcal{V})$, что:

- 1) $\dim \varphi \leq \dim f$, $w(\varphi) \leq w(g)$, $l(\varphi) \leq l(g)$
- 2) $h = h_2 \cdot h_1$.

Теорема 2. (Спектральная теорема). Пусть $S = \{f_a, h_a^b, M\}$ и $T = \{g_a, P_a^b, M\}$ — τ —спектры, а f и g - их пределы соответственно в категории $Unif(Y, \mathcal{V})$, причем $w(f) > \tau \geq \aleph_0$ и $w(g) > \tau$. Тогда для каждой пары морфизмов $\varphi : f \rightarrow g$ и $\psi : f \rightarrow g$ категории $Unif(Y, \mathcal{V})$ множества $A = \{a \in M : \text{существуют такие морфизмы } \varphi_a : f_a \rightarrow g_a \text{ и } \psi_a : g_a \rightarrow f_a, \text{ что } \varphi_a \cdot h_a = P_a \cdot \varphi \text{ и } \psi_a \cdot P_a = h_a \cdot \psi\}$ конфинально и замкнуто в M , где $h_a : f \rightarrow f_a$ и $P_a : g \rightarrow g_a$ —сквозные проекции.

Литература.

1. Борубаев А.А. Равномерная топология. Бишкек, Издательство "Илим" 2013.

Функтор единичного шара пространства знакопеременных мер с конечным носителем и бесконечной степенью

Бозаров Дилмурод Уралович

Каршинский инженерно-экономический институт

e-mail: d.bozarov@inbox.ru

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство (для краткости, компакт), $\mathfrak{B}(X)$ – борелевская σ -алгебра на X , т. е. наименьшая σ -алгебра, порожденная семейством $\mathfrak{U}(X)$ всех открытых подмножеств X . Борелевской (знакопеременной) мерой на X называется [1] произвольная счетно-аддитивная функция

$$\mu: \mathfrak{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Множество всех борелевских мер на X обозначается через $M(X)$.

Для компакта X через $U(X)$ обозначается подпространство (единичный шар) пространства $M(X)$, состоящее из всех мер μ нормы $\|\mu\| \leq 1$. Для компакта X через $U(X)$ – также компакт. Для компакта X и натурального числа n через $U_n(X)$ обозначим подмножество $U(X)$, состоящее из всех мер μ , для которых $|\text{supp}\mu| \leq n$. Положим $U_\omega(X) = \cup\{U_n(X); n = 1, 2, \dots\}$. Для $x \in X$ через δ_x обозначают меру Дирака. Известно, что $U_\omega(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} : \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1 \right\}$. Определим следующее множество

$$U_f(X) = \left\{ \mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i} \in U_\omega(X) : \text{существует } i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ такой, что} \right.$$

$$\left. |\alpha_{i_0}| \cdot \|\mu\| \geq 1 - \frac{1}{n+1} \right\}.$$

Теорема 1. Конструкция U_f определяет функтор $U_f: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$, который обладает всеми свойствами нормального функтора в категории компактных пространств, за исключением сохранения пустого множества, точки и прообразов.

Функтор U_f отличается от функторов, рассмотренных в работах [2], [3].

Теорема 2. Для произвольного компакта X компакт X не является ретрактом компакта $U_f(X)$.

Теорема 3. Для произвольного компакта X имеет место $Sh(X) \neq Sh(U_f(X))$.

References

- [1]. Федорчук В. В., Садовничий Ю. В., О некоторых топологических и категорных свойствах знакопеременных мер, *Фундамент. и прикл. матем.*, Том 5 (1999), №2, стр. 597–618.
- [2]. Заитов А. А., Ишметов А. А., Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер, *Математические заметки*, Том 106 (2019), № 4, стр. 531–542.
- [3]. Заитов А. А., Геометрические и топологические свойства подпространства $P_f(X)$ пространства вероятностных мер, *Известия вузов. Математика*, 2019, № 10, стр. 28–37.

О некоторых свойствах частично упорядоченных линейных алгебр

Т. Бултаков

Джиззахское педагогическое институт

e-mail:

Сначала, приведем некоторые свойства Перрона-Фробениуса для бесконечных матриц.

С1. Определение. Говорят, что Дедекиндово σ -полная частично упорядоченная линейная алгебра обладает свойством Перрона-Фробениуса (PF-свойством), если для каждого элемента $x \in A$, $x \neq 0$ существует такое действительное число $\lambda > 0$ что элемент $(\lambda I - x)$ обратимой и $(\lambda I - x)^{-1}0$.

С2. Определение. Частично упорядоченная линейная алгебра A называется Дедекиндовой σ -полной, если она удовлетворяет следующему условию: на того, что $x_n \in A$, $0 \leq \dots \leq x_2 \leq x_1$ следует существование $\inf x_n$

С3. Определение. Неотрицательный элемент $u \in A$ называется порядковой единицей, если для некоторого $x \in A$ существует такое действительное число α , что $\alpha \cdot u \leq x \leq \alpha \cdot u$

С4. Частично упорядоченная линейная алгебра является также Банаховой алгеброй, такой, что положительный конус $K = \{x : x \in A, x \geq 0\}$ является замкнутым конусом относительно сходимости по норме.

Теперь рассмотрим некоторые примеры, удовлетворяющие условия вышесказанных свойств:

Пример1

Пусть A линейная алгебра всех $n \times n$ -матриц с действительными элементами, где n -фиксированное положительное целое число. Если $x, y \in A$, где $x = [\lambda_{ij}]$ и $y = [\beta_{ij}]$, пусть тогда $x \leq y$ означает, что $\lambda_{ij} \leq \beta_{ij}$ для всех индексов $i, j = 1, 2, \dots$

Таким образом A является частично упорядоченной линейной алгеброй, которая удовлетворяет все выше указанные условия. Если мы определим u как матрицу, в которой все элементы равны действительному числу 1, тогда матрица u для A является порядковой единицей, следовательно A удовлетворяет условию С3. Условия С2 также удовлетворяются; это есть непосредственное следствие свойства вполне упорядоченности действительных числовых систем. Используя теорему 6[1], мы видим что A должно удовлетворять условию С1.

Пример2

Пусть A множество всех бесконечных вещественных матриц $[\lambda_{ij}]$, где $i = 1, 2, \dots, \infty$ такие, что $\sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{ij}| : i = 1, 2, \dots, \infty \right\} < \infty$.

Если $x, y \in A$, где $x = [\lambda_{ij}]$ и $y = [\beta_{ij}]$ тогда $x \leq y$ означает, что $\lambda_{ij} \leq \beta_{ij}$ для всех индексов $i, j = 1, 2, \dots, \infty$.

Таким образом, является частично упорядоченной линейной алгеброй, которая удовлетворяет все условия данные, как и в примере1, условия С2 удовлетворяются.

Однако условия С3 не удовлетворяются. Это следует из того факта, что не существует сходящийся бесконечной последовательности положительных действительных чисел, обладающей тем свойством, что каждая из сходящихся бесконечных последовательностей неотрицательных действительных чисел может быть доминирование некоторым кратным этой бесконечной последовательностью.

Теперь, если для некоторого $x \in A$, где $x = [\lambda_{ij}]$, $\|x\| = \sup\{\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_{ij}| : i = 1, 2, \dots\}$ тогда A является действительной Банаховой алгеброй. Видно, что условия $C4$ удовлетворяется.

Из выше сказанного и из теорем (5) и (6) ([1],[2]) мы можем заключить, что A удовлетворяет условий $C1$.

Литературы.

[1]. R.E.DeMarr. Aclass of partially ordered linear algebras.Amer.Math.Soc., Vol.39, 2, 1973.

[2]. R.E.DeMarr. Ageneralization of the Perron-Frobenius theorem. Duke Math. Joor-nal, Vol.37, №1, March 1970.

[3]. R.E.DeMarr. Convergence of a sequence of powers. Proc.Amer.Math.Soc., Vol.23, №2, 1969.

Обобщенная локализация для кратных рядов Фурье

Буваев К.Т.

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
e-mail: buvayev@mail.ru*

Рассмотрим кратный тригонометрический ряд Фурье

$$\sum_{n \in Z^N} f_n e^{inx} \quad (1)$$

функции $f \in L_2(T^N)$. Здесь Z^N - множество всех векторов с целочисленными компонентами, $x \in R^N$, $nx = n_1 + n_2 + \dots + n_N$, $T^N = \{x \in R^N : -\pi < x_j \leq \pi\}$, $f_n = (2\pi)^{-N} \int_{T^N} f(x) e^{inx} dx$ -числа, называемые коэффициентами Фурье функции f .

Для любого однородного эллиптического полинома $A(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in R^N$ (т.е. $A(\xi) > 0$ при $\xi \neq 0$) с постоянными коэффициентами можно сопоставить частичную сумму ряда (1) по формуле

$$S_\lambda f(x) = \sum_{A(n) < \lambda} f_n e^{inx}, \quad (2)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ - мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$. Далее будем предполагать, что множество $\{\xi \in R^N : A(\xi) < 1\}$ является строго выпуклым (т.е. множество $\{\xi \in R^N : A(\xi) = 1\}$ имеет ненулевые главные кривизны во всех точках). В частности, если $A(\xi) = |\xi|^2$, то $S_\lambda f(x)$ совпадает с обычной шаровой частичной суммой.

Цель данной работы - исследовать сходимость почти всюду этих частичных сумм. Одним из первых вопросов, возникающих при исследовании сходимости почти всюду (п.в.) сумм (2)- это вопрос о справедливости гипотезы Лузина: верно ли, что частичные суммы (2) ряда (1) любой функции $f \in L_2(T^N)$ сходятся п.в. на

T^N ? Иначе говоря, распространяется ли теорема Карлесона на N - кратные ряды Фурье при суммировании по (2)? Ответ на этот вопрос до настоящего момента не известен. Известно, однако, что теорема Ханта на N - кратные ($N > 1$) ряды, суммируемые по (2), не распространяется. Исторически прогресс в решении гипотезы Лузина был достигнут путем рассмотрения более простых проблем. Одной из таких более простых проблем является исследование п.в. сходимости частичных сумм (2) на $T^N / \text{supp} f$.

В.А.Ильин [1] первым ввел понятие обобщенного принципа локализации для произвольных разложений по собственным функциям. Следуя Ильину, мы говорим, что обобщенный принцип локализации S_λ справедливо в $L_p(R^N)$, если для любой функции $f \in L_p(R^N)$ равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda f(x) = 0 \quad (3)$$

выполняется п.в. на $T^N / \text{supp} f$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема. Пусть $f \in L_2(R^N)$ и $f = 0$ на открытой области $\Omega \subset T^N$. Тогда равенство (3) выполняется почти всюду на Ω .

Следует отметить, что в [2] этот результат доказан для шаровых частичных сумм рядов (1).

Литература

[1]. Il'in, V.A. On a generalized interpretation of the principle of localization for Fourier series with respect to fundamental systems of functions, Sib. Mat. Zh., 9, 1093-1106 (1968).

[2]. Ashurov R.R. Generalized Localization for Spherical Partial Sums of Multiple Fourier Series Journal of Fourier Analysis and Applications <https://doi.org/10.1007/s00041-019-09697-7>.

О вычислимости алгоритмических представлений некоторых типов абстрактных моделей данных в нижних классах иерархии Клини—Мостовского

Дадажанов Р.Н., Каримова Н.Р.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан

e-mail: dadajonovrn@mail.ru, nodirakarimova@bk.ru

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1,2,3].

Абстрактной моделью данных называется произвольное множество вместе с фиксированной системой операций и отношений заданных на нем (сигнатурой). В теоретической информатике одной из ключевых является проблема адекватного описания модели данных и ее задания посредством подходящего семейства алгоритмов. С этой точки зрения идеальными описаниями являются вычислимые представления. Будем предполагать, что задаваемые нами модели данных включают

в себя натуральные числа вместе с естественным порядком $\leq$ и функцией следования $s(n) = n + 1$.

Чуть выше вычислимых представлений в иерархии Клини—Мостовского расположены негативные и позитивные представления. Обозначим через Ω введенную выше модель $\langle \omega; 0, s, \leq \rangle$, где ω — множество натуральных чисел, 0 — обозначение числа нуль, s — генератор натуральных чисел ($s(n) = n + 1$) и $\leq$ — естественное упорядочение натурального ряда.

Очевидно, что всякое позитивное представление модели $\langle \omega; 0, s \rangle$ является вычислимым. Известно также, что эта модель обладает негативными невычислимыми представлениями ([5]). В теоретической информатике под реализационной полнотой некоторой «стандартной» модели программной спецификации понимается единственность позитивного представления этой модели, т.е. вычисляемая изоморфность всех позитивных представлений упомянутой модели ([4]). С этой точки зрения, к примеру, стандартная модель арифметики Пеано не является реализационно полной относительно ее негативных представлений, поскольку имеется как минимум два негативных представления — обычное вычислимое и негативное невычислимое.

Пусть абстрактная модель данных Ω^* является обогащением Ω .

Теорема 1. *Всякое позитивное и негативное представление абстрактной модели данных Ω^* вычислимо и любая пара таких представлений вычислимо изоморфна.*

Таким образом, введение естественного порядка натуральных чисел в модель данных кардинально меняет класс ее алгоритмических представлений.

Замечание. В теоретическом программировании одной из ключевых задач является проблема единственности эффективной реализации абстрактной модели данных, т.е. вычислимой изоморфности различных реализаций некоторой стандартной модели для заданной спецификации. Под эффективным представлением модели обычно понимается позитивное. Однако, негативные представления порой несут не менее важную семантическую информацию о свойствах стандартной модели спецификации (обоснования этого тезиса см. в [6]), поэтому представляется целесообразным рассматривать в качестве представлений модели данных ее алгоритмические представления и в других нижних классах иерархии Клини—Мостовского. Одним из уточнений такого подхода является рассмотрение в качестве алгоритмических представлений не только позитивных, но и негативных. В рамках такого подхода стандартная модель арифметики Пеано (тем более, арифметики Пресбургера) не является реализационно полной. Тем не менее, с точки зрения реализационной полноты, при добавлении естественного порядка, реализационная полнота (относительно как позитивных, так и негативных представлений) имеет место.

Литература

- [1]. Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств. Перевод с английского, под ред. М.М. Арсланова, Казанское математическое общество, Казань, 2000, 576 с.
- [2]. Ершов Ю.Л. Теория нумераций, М., Наука, 1977, 416 с.
- [3]. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели, Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.

[4]. Гончаров С.С. Модели данных и языки их описаний. Вычислительные системы, Труды ИМ СО РАН, 1985, №107, С.52–70.

[5]. Khoussainov B.M., Slaman T., Semukhin P. Π_1^0 -presentations of algebras. Arch. Math. Logic, 2006, 45, №6, pp.769–781.

[6]. Касымов Н.Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры. Успехи матем. наук, 1996, 51, №3, С.145–176.

Метризация пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов

Джаббаров Г.Ф., Жаббаров М.М.

ТГПУ им. Низами

e-mail: gayrat_77@bk.ru

Настоящая работа посвящена изучению пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных и однородных функционалов на метрическом компакте. Для метрического компакта X , приводим формулу вычисления метрики на пространстве слабо аддитивных сохраняющих порядок однородных функционалов $S(X)$.

Пусть X – компактное пространство. Через $C(X)$ обозначим пространство всех вещественно-значных непрерывных функций $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ с поточечными алгебраическими операциями и $\sup$ -нормой, т.е., с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. Для каждого $c \in \mathbb{R}$ через c_X обозначим постоянную функцию, определенную как $c_X(x) = c, x \in X$. Пусть $\varphi, \psi \in C(X)$. Неравенство $\varphi \leq \psi$ означает, что $\varphi(x) \leq \psi(x)$ при всех $x \in X$.

Функционал $\nu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется [1]:

- (1) слабо аддитивным, если $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c\nu(1_X)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$;
- (2) сохраняющим порядок, если для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \leq \psi$ следует, что $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$;
- (3) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;
- (4) положительно-однородным, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X), t \in \mathbb{R}, t \geq 0$;
- (5) однородным, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X), t \in \mathbb{R}$;
- (6) полуаддитивным, если $\nu(\varphi + \psi) \leq \nu(\varphi) + \nu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$.

Для каждого компакта X положим

$$V(X) = \prod_{\varphi \in C(X)} [\min \varphi, \max \varphi].$$

Для всякого отображения $f : X \rightarrow Y$ через $V(f)$ обозначим отображение из $V(X)$ в $V(Y)$ определенное по правилу

$$V(f)(\nu)(\varphi) = \nu(\varphi \circ f), \quad \nu \in V(X), \varphi \in C(X).$$

Для компакта X обозначим:

- $O(X)$ – множество всех слабо аддитивных, сохраняющий порядок и нормированных функционалов на $C(X)$;
- $OH(X)$ – множество всех положительно-однородных функционалов из $O(X)$;
- $S(X)$ – множество всех однородных функционалов из $O(X)$;
- $OS(X)$ – множество всех полуаддитивных функционалов из $OH(X)$;
- $P(X)$ – множество всех положительных, нормированных и линейных функционалов на $C(X)$.

Рассмотрим $\mathcal{F}(X)$ ($\mathcal{F} = O, OH, S, OS, P$) как подпространство пространства $V(X)$, снабженное с топологией поточечной сходимости, в частности, базу окрестностей функционала $\nu \in \mathcal{F}(X)$, образуют множества вида

$$\langle \nu; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \varepsilon \rangle = \{ \nu' \in \mathcal{F}(X) : |\nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon, i \in \overline{1, k} \},$$

где $\varepsilon > 0$, $\varphi_i \in C(X)$, $i \in \overline{1, k}$, $k \in \mathbb{N}$. Для каждого компакта X пространство $\mathcal{F}(X)$ является выпуклым компактом.

Пусть X и Y – компакты и $f : X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение. Отображение $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, где $\mathcal{F} = O, OH, S, OS, P$, определяется как сужение $V(f)$ на $\mathcal{F}(X)$.

Функтор O впервые был рассмотрен Т. Радулом [1], функтор S был введен В. Валовым [2], а функторы OH и OS были изучены в [3] и [4], соответственно.

Пусть (X, ρ) – метрический компакт. Положим

$$\text{Lip}(X) = \{ \varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists k > 0, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k\rho(x, y), \forall x, y \in X \}$$

и

$$\text{Lip}_1(X) = \{ \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \rho(x, y), \forall x, y \in X \}.$$

Определим метрику Канторовича–Рубинштейна на $OH(X)$ по правилу

$$\rho_{OH}(\mu, \nu) = \sup\{ |(\mu - \nu)(\varphi)| : \varphi \in \text{Lip}_1(X) \}, \mu, \nu \in OH(X). \quad (42)$$

Для $f, g \in C(X)$ положим $(f \oplus g)(x, y) = f(x) + g(y)$, $x, y \in X$. Тогда $f \oplus g \in C(X \times X)$.

Пусть $f \oplus g \leq h \oplus q$. Тогда

$$\mu_1(f) + \mu_2(g) \leq \mu_1(h) + \mu_2(q), \quad (43)$$

где $\mu_1, \mu_2 \in O(X)$.

Действительно, $f(x) + g(y) \leq h(x) + q(y)$ при всех $x, y \in X$. Отсюда $f(x) - h(x) \leq q(y) - g(y)$. Следовательно

$$\inf_{x \in X} (f(x) - h(x)) \leq \sup_{y \in X} (q(y) - g(y)).$$

Это означает, что найдется число $c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$f - h \leq c_X \leq q - g.$$

Отсюда

$$\mu_1(f) + \mu_2(g) \leq \mu_1(h + c_X) + \mu_2(q - c_X) = \mu_1(h) + \mu_2(q).$$

Определим метрику Канторовича–Рубинштейна ρ_S на $S(X)$ как сужение метрики ρ_{OH} на $S(X)$, т.е.,

$$\rho_S(\mu, \nu) = \sup\{ |(\mu - \nu)(\varphi)| : \varphi \in \text{Lip}_1(X) \}, \quad \mu, \nu \in S(X).$$

Теорема. Для метрики Канторовича–Рубинштейна на $S(X)$ имеет место равенство

$$\rho_S(\mu_1, \mu_2) = \sup \{ \mu_1(f) + \mu_2(g) : f \oplus g \leq \rho \}, \quad \mu_1, \mu_2 \in S(X).$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Radul T. On the functor of order-preserving functionals, Comm. Math. Univ. Carol. 39 (1998), no. 3, 609–615.
- [2]. Valov V. Extenders and κ -metrizable компакта, Math. Notes, **89** (2011) 319–327.
- [3]. Djabbarov G. F. Categorical properties of the functor of weakly additive positively-homogeneous functionals, Uzb. Math. J. (2006), no. 2, 20–28.
- [4]. Davletov D.E., Djabbarov G.F. Functor of semiadditive functionals. Methods of Functional Analysis and Topology. Vol. 14 (2008), No. 4, pp. 314–322.

Пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов ранга 2

Дуйсенгалиева Б.А., Науразбекова А.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

Нур-Султан, 010008, Казахстан

e-mail: bibinur.88@mail.ru, em altyngul.82@mail.ru

В 1968 году Р. Ренчлер [1] доказал, что локально-нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов ранга 2 над полем характеристики ноль являются триангулируемыми. Аналог этого результата для свободных алгебр Пуассона был доказан в работе [?]. Рассмотрим дифференцирование ∂ алгебры многочленов $k[x, y, z]$ над полем нулевой характеристики, определенное правилом $\partial : x \mapsto 2y, y \mapsto z, z \mapsto 0$. Тогда $w = y^2 - xz$ принадлежит ядру дифференцирования ∂ и дифференцирование $D = w\partial$ является локально-нильпотентным. Х. Басс [?] показал не триангулируемость дифференцирования $D = w\partial$.

Дифференцирование D непосредственно дает пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов $k\{x, y, z\}$ с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$.

Для свободных алгебр Новикова ранга 3 над полем нулевой характеристики также был построен пример не триангулируемого дифференцирования, который является аналогом дифференцирования D [?].

Пусть k – произвольное дифференциальное поле характеристики 0 и $A = k\{x, y\}$ – алгебра дифференциальных многочленов от двух переменных x, y над полем k с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$.

Нами построен пример не триангулируемого дифференцирования алгебры дифференциальных многочленов ранга 2 над полем характеристики ноль в случае $m \geq 2$.

Theorem. Пусть $A = k\{x, y\}$ – алгебра дифференциальных многочленов от двух переменных x, y с множеством коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ над полем k нулевой характеристики, и пусть $m \geq 2$. Тогда дифференцирование

$$D_1 = w^{\delta_2} \partial_x + w^{\delta_1} \partial_y,$$

где $w = x^{\delta_1} - y^{\delta_2}$, алгебры $A = k\{x, y\}$ не является триангулируемым.

References

- [1]. R. Rentschler. Operations du groupe additif sur le plan // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1968. – Vol. 267. – P. 384–387.
- [2]. L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev. Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables // J. Algebra. – 2009. – Vol. 322, No. 9. – P. 3318 – 3330.
- [3]. H. Bass. A non-triangular action of G_a on A^3 // J. of Pure and Appl. Algebra. – 1984. – Vol. 33, No. 1. – P. 1–5.
- [4]. Б.А. Дуйсенгалиева, У.У. Умирбаев. Дикий автоморфизм свободной алгебры Новикова // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – Т. 15. – С. 1671–1679.

Об одной задаче управления для уравнений дробного порядка в стержне

Файзиёв Ю.Э., Рахимов А.А.

*Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
e-mail: fayziev.yusuf@mail.ru, Abdulaziz1992rahimov@mail.ru*

Этот тезис посвящен изучению задачи управления граничными условиями для дифференциальных уравнений дробного порядка. Задача состоит в управлении процессом в стержне, один из концов которого поддерживается при заданных условиях, а второй – при нулевой функции. Методы решения дифференциальных уравнений целого и дробного порядков, удовлетворяющих краевым и начальным условиям, можно найти в книгах [1], [2], [3].

Пусть m – положительное целое число и $m - 1 < \alpha \leq m$. Дробное производное Римана-Лиувилля порядка α определяется следующим образом (см.[3]):

$$D^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} [I^{m-\alpha} f(t)], \quad t > 0, \quad (1)$$

где интеграл

$$I^\beta f(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \beta > 0, \quad (2)$$

называется дробным интегралом Римана – Лиувилля порядка β и $I^0 f(t) := f(t)$.

Пусть $0 < \alpha \leq 1$, и пусть функция $u(x, t)$ является решением уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha u = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (3)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$\mu(0) = 0$, $|\mu(t)| \leq M$ и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция, M - положительное число.

Задача. Пусть задана постоянная $B > 0$. Найти граничное условие $\mu(t)$ такое, что решение задачи (3) - (5) удовлетворяло равенству

$$\int_0^l u(x, t) dx = B \quad (6)$$

Теорема. Для того, что бы решение задачи (3) - (5) удовлетворяло условию (6), достаточно, что бы функция $\mu(t)$ удовлетворяла следующему уравнению

$$\int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = g(t), \quad (7)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^2} (\lambda_n a)^2 (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-(\lambda_n a)^2 (t - \tau)^\alpha),$$

$$g(t) = B - \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \left[\hat{f}_n(t) + c_n E_{\alpha, \alpha}(-(\lambda_n a)^2 t^\alpha) \right],$$

$$\hat{f}_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^t \int_0^l f(\xi, \tau) \sin \frac{\pi n \xi}{l} (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-(\lambda_n a)^2 (t - \tau)^\alpha) d\xi d\tau,$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi,$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad T > 0.$$

Отметим, что в случае $\alpha = 1$, задача управления процессом теплообмена изучена в работах академика Ш.О. Алимова (см. [4] - [8]) и в неоднородном случае - в работах [9] - [11].

ЛИТЕРАТУРЫ

- [1]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1972.
- [2]. Lions J.L., Control Optimal de Systems Governess par des Equations aux Derivees Partielles. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [3]. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [4]. Алимов Ш.А., О задачи быстрогодействия в управлении процессом теплообмена//Уз. Мат. Жур. 2005 г. N 4, с. 13-21.
- [5]. Алимов Ш.А., Об одной задаче управления процессом теплообмена, ДАН России, 2008 г. Т. 421, N 5, с. 583-585.
- [6]. Alimov Sh.A., S. Albeverio, On a Time-Optimal Control Problem Associated with the Heat Exchange Process, Appl. Math. Optim. 2008, 57: 58-68.
- [7]. Alimov Sh.A., On a control problem associated with the heat transfer process, Eurasian mathematical journal, Volume 1, N 2, 2010, 17 - 30.
- [8]. Alimov Sh.A., On the null-controllability of the heat exchange process, Eurasian mathematical journal, Volume 2, N 3, 2011, 5 - 19.
- [9]. Файзиев Ю.Э., Халилова Н., Об одной задаче управления процессом теплопроводности, Вестник НУУз, 2016, N2/1, 49-54.
- [10]. Файзиев Ю.Э., Кучкаров А.Ф., Насирова Д., Об одной задаче управления процессом теплопроводности в прямоугольнике, Вестник НУУз, 2017, N2/2, 239-244.
- [11]. Fayziev Yu. E., On the control of heat conduction, IIUM Engineering Journal, Vol. 19, No. 1, 2018.

Канторовы множества с многомерными проекциями

Фролкина О.Д.

Л. Антуан построил канторово множество на плоскости, все проекции которого такие же, как у правильного шестиугольника [2, 9, p.272; fig.2, p.273]. К. Борсук описал канторово множество в R^N , проекция которого на любую гиперплоскость содержит $(N-1)$ -мерный шар, эквивалентно, имеет размерность $(N-1)$ [4]. Дж. Кобб привел пример канторова множества в R^3 , проекция которого на любую 2-плоскость одномерна [5], и сформулировал общую проблему: существует ли, для заданных чисел $N > m > k > 0$, такое канторово множество в R^N , что его проекция на любую m -плоскость имеет размерность k ? Для случаев $k = m - 1$ и $m = N - 1$ такие множества построены в работах [6] и [3] соответственно.

Конструкция Кобба достаточно сложная. В докладе будет показано, что ожерелье Антуана [1, 78, p. 91–92] может служить другим примером канторова множества в R^3 , все проекции которого одномерны, кроме того, связны. Мы показываем, что всякое канторово множество в R^N посредством малой изотопии пространства R^N может быть сдвинуто на такое множество, проекция которого на любую $(N-1)$ -плоскость $(N-2)$ -мерна. Подробное изложение этих результатов автора дано в статье [7].

Далее, оказывается, что канторовы множества с многомерными проекциями являются “исключительными” в следующем смысле. Пусть $\mathcal{C}(R^N)$ — пространство всех канторовых множеств в R^N , снабженное метрикой Хаусдорфа. Известно, что $\mathcal{C}(R^N)$ является пространством Бэра. Мы доказываем, что имеется такое плотное

G_δ -множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}(R^N)$, что для всякого $X \in \mathcal{P}$ и всякого ненулевого линейного подпространства $L \subset R^N$ проекция X на L является канторовым множеством. Детали см. в работе [8]. Это дает частичный ответ на другой вопрос Кобба, поставленный в статье [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00169).

Литература.

- [1] L. Antoine. Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. — Thèses de l'entre-deux-guerres, vol. 28, 1921. <http://eudml.org/doc/192716>
- [2] L. Antoine. Sur les voisinages de deux figures homéomorphes // Fund. Math., 5 (1924), 265-287.
- [3] S. Barov, J.J. Dijkstra, M. van der Meer. On Cantor sets with shadows of prescribed dimension // Topol. Appl., 159 (2012), 2736-2742.
- [4] K. Borsuk. An example of a simple arc in space whose projection in every plane has interior points // Fund. Math., 34 (1947), 272-277.
- [5] J. Cobb. Raising dimension under *all* projections // Fund. Math., 144:2 (1994), 119-128.
- [6] O. Frolkina. A Cantor set in with “large” projections // Topol. Appl., 157:4 (2010), 745-751.
- [7] O. Frolkina. Cantor sets with high-dimensional projections // Topol. Appl., принято к печати.
- [8] O. Frolkina. All projections of a typical Cantor set are Cantor sets // Topol. Appl., принято к печати.

Свободные абелевы n -периодические топологические группы

Гензе Л.В.

Пусть $n \geq 2$ — некоторое натуральное число. Группу G с единицей e будем называть n -периодической, если $g^n = e$ для каждого $g \in G$.

Пусть $n \geq 2$ — фиксированное натуральное число и X — произвольное множество. Свободной абелевой n -периодической группой, порожденной множеством X , будем называть прямую сумму семейства групп $\{Z_n^x\}_{x \in X}$, где группа Z_n^x изоморфна Z_n (аддитивной группе классов вычетов по модулю n) для каждого $x \in X$. Элементы этой группы можно представлять себе так: это формальные конечные линейные комбинации $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k$ элементов множества X с коэффициентами $\alpha_i \in Z_n$, причем две такие линейные комбинации равны тогда и только тогда, когда они отличаются, самое большее, порядком слагаемых. Сложение линейных комбинаций проводится формально, путем сложения коэффициентов при одинаковых x_i и приведения их по модулю n .

Свободной абелевой n -периодической топологической группой пространства X (в смысле Маркова), называется топологическая группа $A^{[n]}(X)$, обладающая следующими свойствами:

1. алгебраически $A^{[n]}(X)$ является свободной абелевой n -периодической группой, порожденной множеством X ;

2. X гомеоморфно замкнутому подпространству в $A^{[n]}(X)$;
3. если G — произвольная абелева n -периодическая топологическая группа и $f: X \rightarrow G$ — непрерывное отображение, то f можно продолжить до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}: A^{[n]}(X) \rightarrow G$.

Некоторые свойства групп $A^{[n]}(X)$ аналогичны соответствующим свойствам свободных абелевых топологических групп $A(X)$. Среди этих свойств — некоторые соотношения между кардинальными инвариантами пространства X и группы $A^{[n]}(X)$, описание топологии группы $A^{[n]}(X)$ для компактного пространства X , свойства компактов, лежащих в $A^{[n]}(X)$, связь между размерностью пространства X и группы $A^{[n]}(X)$ и др. В тоже время некоторые свойства свободных абелевых n -периодических топологических групп $A^{[n]}(X)$ могут существенно отличаться от свойств свободных абелевых топологических групп $A(X)$. Например, у этих групп различается топологическая изоморфная классификация в том случае, когда X — это начальный отрезок ординалов. По другому ведут себя группы $A^{[n]}(X)$ и по отношению к P -рефлексивности (абелева топологическая группа G называется P -рефлексивной, если естественный гомоморфизм группы G во вторую группу характеров G^{**} является топологическим изоморфизмом). Так же известно, что группа $A(X)$ тихоновского пространства X содержит любую конечную степень X^k в качестве замкнутого подпространства. Это утверждение неверно для свободных абелевых n -периодических топологических групп.

Данный доклад будет посвящен обзору результатов, касающихся групп $A^{[n]}(X)$ и сравнению этих свойств со свойствами групп $A(X)$.

Исследование потенциала Хиггса расширений стандартной модели с нарушением CP -инвариантности методами топологии, геометрии и теории катастроф

А. В. Гурская, М. В. Долгополов, Т. Ф. Жураев, В. А. Макеева

*Самарский государственный технический университет, Самарский университет,
443011, Самара, ул. Академика Павлова*

*Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами
e-mail: mikhaildolgoplov68@gmail.com*

Рассматривается развитие и использование методов теории катастроф в приложении к температурной эволюции эффективных потенциалов типа потенциала Хиггса с расширенным двухдублетным сектором и дополнительными синглетными полями. Фоновые поля являются переменными состояния системы, а пространство параметров содержит управляющие параметры. В потенциале Хиггса в расширениях стандартной модели при рассмотрении выделенных направлений фоновых полей возникают бифуркационные множества, вдоль которых эволюционирует стабильный минимум (физическое состояние) в ходе своей космологической эволюции. Каждый набор рассматривается по отдельности в рамках теорий устойчивости и катастроф [?, ?, ?]. При критической температуре потенциал приводится методами нелинейных преобразований к сумме функции катастрофы и морсовского седла. Сепаратрисы

строятся в пространстве параметров исследуемых моделей. Проводится вычисление эволюции управляющих параметров методами конечнотемпературной теории поля. Исследование системы условий для экстремальных поверхностей проводится с использованием базисов Гребнера. Для иллюстрации результатов рассмотрены возможности визуализации поверхностей минимума и сепаратрис при помощи методов пакета аналитической системы Mathematica.

Отметим, что получение бифуркационных наборов для потенциалов МССМ и НМССМ является математическим подходом для исследования структуры и эволюции потенциала, при варьировании управляющих параметров λ , k и многообразия сепаратрис, определяющих базисы физических состояний в минимуме [?]. Это позволяет анализировать проявления нарушения CP -инвариантности [?, ?] в скалярном секторе, с явным и спонтанным нарушениями в общем положении $\odot$ [?]. Методы получения экстремальных поверхностей многопараметрического эффективного потенциала позволят включать условия существования глобального и локального минимумов в критерии обоснованности применения моделей с расширенным сектором Хиггса. Также рассматриваются кривизна и кручение эффективного потенциала, с использованием дифференциальных 1-й и 2-й форм для поверхностей четвертого порядка.

References

- [1]. М. В. Долгополов, С. П. Заводов, Е. Ю. Петрова Бифуркационные наборы расширенного потенциала Хиггса, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 4(33) (2013), - С. 173–183.
- [2]. С. П. Заводов Исследование экстремальных свойств потенциала Хиггса в ДДМ, МССМ и НМССМ. Вторая международная молодежная научная школа «Современные проблемы физики и технологий» 11-14 апреля 2013, Москва. - 2013. - С.35–36.
- [3]. М. Н. Дубинин, Е. Ю. Петрова Высокотемпературный потенциал Хиггса двухдублетной модели в рамках теории катастроф, ТМФ, - 184:2 (2015), - С. 315–337.
- [4]. М.В. Долгополов, Н.М. Долгополов Бифуркационные наборы в неминимальной суперсимметрии. Problems of modern topology and its applications. - Tashkent – 2017. – С. 173-175.
- [5]. T. D. Lee A Theory of Spontaneous T Violation. Phys.Rev. D. 1973 V. 8. P. 1226–1239.
- [6]. H. Georgi A model of soft CP violation. Hadr. J. Phys. 1978. V. 1. P. 155–168.
- [7]. В. В. Тишин Дискретная математика в примерах и задачах. - Самара, 2007. - С. 6.

Некоторые частные случаи обобщенной кривизны поверхности

Ибодуллаева Н.М.

Навоийский Государственный Педагогический институт

e-mail: nafisa.28.02.1991@mail.ru

В работе [1] предложено один из способов обобщения понятия внешней кривизны поверхности. Внешняя кривизна является площадью ее сферического отображения.

Определение 1. Поверхность Φ называется звездно расположенным относительно сферы S , если любой луч исходящий из начало координат пересекает Φ не более чем на одной точке.

Пусть Φ звездно расположенная поверхность относительно сферы S . Тогда луч, исходящий из центра сферы и пересекающая S в точке X пересекает поверхность Φ в точке $X(\Phi)$ или не пересекает. Точку $X(\Phi)$ - назовем проекцией точки $X \in S$ на поверхность Φ , если оно существует.

Определение 2. Если точка $X \in S$ – сферическое отображение точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F , то точку $X(\Phi)$ - назовем обобщенным отображением точки $M(x_0, y_0)$ относительно поверхности F на поверхность Φ .

Пусть M^* – некоторое множество точек на S . Тогда центральная проекция этого множества на Φ образует множество M^+ .

Пусть M множество в области D , где определена поверхность F и $\bar{M}$ множество точек на поверхности F , проекцией которого является $M \subset D$. Рассмотрим точки $\bar{M} \in F$ проекцией $M \in D$, обозначим через M^+ обобщенную отображение точки $\bar{M} \in F$. Когда точка M меняется на множестве $M \subset D$, его обобщенное отображение составляет, в общем случае, некоторое множество $M^+ \subset \Phi$. Множество M^+ назовем обобщенным отображением множества $M \subset D$, относительно поверхности F на поверхности Φ .

Определение 3. Площадь множества $M^+ \subset \Phi$ назовем обобщенной внешней кривизной множества M относительно поверхности F и обозначим как

$$\omega_F(M) = S_\Phi(M^+).$$

Теорема 1. Нормальное отображение поверхности [2] является частным случаем обобщенной кривизны, когда поверхность Φ - является касательной плоскостью.

Теорема 2. Внешняя кривизна выпуклой поверхности галилеева (изотропного) пространства, это обобщенная кривизна, когда поверхность Φ - цилиндр направляющий которого большая окружность сферы.

Литература

[1] Артыкбаев А., Вернер А.Л. Неодносвязные выпуклые поверхности заданной интегральной условной внешней кривизной // Вопросы дифференциальной геометрии «в целом». Л., 1983. С. 3-8.

[2] Илья J. Bakelman. Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.

[3] А. Артыкбаев, Д.Д. Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени, Т.: Фан, 1991.

Краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа с оператором Римана-Лиувилля

Исломов Б.И., Абдуллаев О.К.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент

e-mail: islomovbozor@yandex.ru, abddullaev.otabek-1995@yandex.com

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} D_{0y}^\alpha u_{xx} - D_{0y}^\beta u, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y > 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup AB$, где $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, а Ω^- - область ограничения характеристиками AC и BC уравнения (1) и отрезком $\overline{AB}$, $-1 < \alpha < 0$, $-1 < \beta < 0$, $D_{ax}^c \varphi(x)$ - оператор интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля дробного порядка s [1].

Определения. Регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, y)$ из класса $y^{1+\alpha-\beta}u \in C(\bar{\Omega}^+)$, $u_{xx} \in C(\Omega^+)$, $y^{1+\alpha-\beta}(y^{1+\alpha-\beta}u)_y \in C(\Omega^+ \cup AB)$, $u \in C(\bar{\Omega}^-) \cap C^2(\Omega^-)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega^+ \cup \Omega^-$.

Задача. Найти в области Ω регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\frac{d}{dx}u[x/2; -x/2] = a(x)u(x, 0) + b(x)u_y(x, 0) + c(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

на интервале AB выполняются условия сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1+\alpha-\beta}u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1+\alpha-\beta}[y^{1+\alpha-\beta}u(x, y)]_y = \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y),$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ - заданные достаточно гладкие функции.

Заметим, что аналог задачи Трикоми для уравнения (1) в случае $\alpha = 0$, $\beta > 0$, $a(x) = b(x) = 0$ изучена в работе [2].

Справедлива следующая

Теорема. Если выполнены условия

$$y^{1+\alpha-\beta}\varphi_0(y), \quad y^{1+\alpha-\beta}\varphi_1(y) \in C(\bar{\Omega}^+), \\ a(x), \quad b(x), \quad c(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1),$$

то поставленной задачи имеет единственное регулярное решение.

Единственность решения поставленной задачи доказывается с помощью принципа экстремума для параболических и гиперболических уравнений, а существования - методом интегральных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Псху А.Б. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
2. Хубиев К. У. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного гипербола-параболического типа. // "Матем. заметки СВФУ". 24:3. (2017). С. 12-18

О существовании решения уравнения Монжа-Ампера внутри сферы изотропного пространства

Исмоилов Ш.Ш.

Национальный Университет Узбекистана

e-mail: Ismoilovsh94@mail.ru

Рассмотрим в изотропном пространстве R_3^2 – изотропную сферу S заданную уравнением

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Пусть $z = H$ плоскость пересекает изотропную сферу S по окружности L . Обозначим через $W(L)$ выпуклые поверхности, с краем L и содержащейся внутри сферы S , выпуклостью вниз ($z < 0$). Предположим L' – проекция L на плоскости Oxy и произвольную точку $(x_0, y_0) \in D_0$ и обозначим D' – область $D/(x_0, y_0) = D'$. Рассмотрим точку $A(x_0, y_0, z_0)$ – причем $0 < z_0 < H$.

Теорема. Если в области D' – задана функция $\omega(M)$, $M \in D'$ и $M \in D'$, ограничена, то в классе $\omega(M)$ существует выпуклая поверхность F_0 , с минимумом в точке $A(x_0, y_0, z_0)$.

Доказательство теоремы связано с пространством R_3^2 и следует из теоремы 7, которая дана в работе [2].

Литература

- [1]. Розенфельд Б.А., Неевклидовы пространства. Москва, 1969.
- [2]. Артыкбаев А., Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве//Математический сборник, 1982.
- [3]. А.Артыкбаев, Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени, Т.: Фан, 1991.
- [4]. Погорелов А.В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. Москва: «Наука» 1991.
- [5]. А.Артыкбаев Ш.Исмоилов, Двойственные поверхности изотропного пространства//«Математика, механика и информатика фанларининг ривожиди истедодли ешларнинг урни» илмий-амалий семинар тезислар туплами. УЗМУ, Тошкент-2018.

Аналог теоремы Харнака в классе А-гармонических функций

Жабборов Н.М., Хурсанов Ш.Я.

Национальный Университет Узбекистана

Целью данной работы является исследование $A(z)$ – гармонических функций в классе $A(z)$ – аналитических функций в рассматриваемой односвязной выпуклой области. В ней доказывается аналог теоремы Харнака для $A(z)$ – гармонических функций.

Уравнение Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z), \quad (55)$$

имеет непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $|A(z)| \leq C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (55) принято говорить *A-аналитическими функциями* ($A(z)$ -аналитическими функциями) [1-6].

Как и в классическом случае, теория $A(z)$ -гармонических функций двух переменных важна как с теоретической, так и с прикладной точки зрения.

Пусть, $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная выпуклая область.

Теорема 1 (см.[7]). Действительная часть A -аналитической функции $f \in O_A(G)$, где $G \subset D$, удовлетворяет в области G уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{1-|A|^2} \left[(1+|A|^2) \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A \frac{\partial u}{\partial z} \right] \right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{1}{1-|A|^2} \left[(1+|A|^2) \frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right] \right] = 0. \quad (55).$$

Определение 1. (см.[7]). Двжды дифференцируемая функция $u \in C^2(G)$, $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, называется $A(z)$ -гармонической в области G , если всюду в G удовлетворяет дифференциальному уравнению (55).

Класс A -гармонических в области G функций обозначается как $h_A(G)$. Таким образом, действительная часть, а значит и мнимая часть A -аналитической функции $f \in O_A(G)$ является A -гармоническими функциями в области G . Функцию v принято называть *гармонически сопряженной с функцией u* . Для односвязных областей верно и обратное

Теорема 2 (см.[7]). Если функция $u(z) \in h_A(G)$, где G — односвязная область, то существует $f \in O_A(G) : u = \operatorname{Re} f$.

В теории A -аналитических и A -гармонических функций естественно рассматривается следующая задача Дирихле:

Задана ограниченная область $G \subset D$ и на границе ∂G задана непрерывная функция $\phi(\xi)$. Требуется найти A -гармоническую в области G , непрерывную на замыкании $\bar{G}$ функцию $u(z) \in h_A(G) \cap C(\bar{G}) : u|_{\partial G} = \phi$.

Теорема 3 (Принцип экстремума): Если $u \in h_A(D)$ в области D достигает своего экстремума, тогда $u \equiv \operatorname{const}$.

Следствие 1: Пусть $u \in h_A(D)$ и для $a \in D$

$$M(r) := \sup_{z \in L(a,r)} u(z), \quad m(r) := \inf_{z \in L(a,r)} u(z).$$

Тогда функция $M(r)$ на интервале $(0; r_0)$ монотонно возрастает, а функция $m(r)$ монотонно убывает. Здесь $L(a, r_0) \subset D$.

Предложения 1. Задача Дирихле для $A(z)$ -гармонической функции имеет единственное решение.

Теорема 4 (см.[6]). Если функция u $A(z)$ -гармонична в лемнискате $L(z, R) \subset \subset D$ то для любого $r < R$, значение в центре лемнискаты равно среднему ее значению на лемнискате $L(z, r)$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i r^2} \iint_{|\psi(z,\xi)| \leq r} u(\xi) d\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi i r^2} \iint_{|\psi(z,\xi)| \leq r} u(\xi) (1 - |A(\xi)|^2) d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

где $d\mu = (1 - |A(\xi)|^2) d\xi \wedge d\bar{\xi}$ мера на лемнискате.

Предложение 2. Следующие утверждения эквивалентны

1. $u \in h_A(D)$;
2. Для любого $z \in D$ и $L(z, r) \subset\subset D$ выполняется следующее равенство

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|\psi(\xi, z)|=r} u(\xi) |d\xi + A(\xi) d\bar{\xi}|$$

3. Для любого $z \in D$ и $L(z, r) \subset\subset D$ выполняется следующее равенство

$$u(z) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\psi(\xi, z)| \leq r} u(\xi) d\mu.$$

Теорема 5 (Аналог теорема Харнака). *Монотонно убывающая последовательность $A(z)$ -гармонических функций $u_j \in h_A(D)$ либо равномерно (внутри D) сходится к $-\infty$, либо равномерно сходится к некоторой $A(z)$ -гармонической $u \in h_A(D)$ функции.*

Л и т е р а т у р а

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М. Физматгиз, 1958г.
2. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, *Монография*, 2012, 212 с.
3. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Теорема Коши для $A(z)$ -аналитических функций, *Узбекский математический журнал*, 2014, №1, стр. 15-18.
4. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У. Аналог интегральной формулы Коши для A -аналитических функций, *Узбекский математический журнал*, 2016, №4, стр. 50-59.
5. Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A -analytic functions, *Siberian Federal University, Maths&Physics*, 2016 y 9(57), с. 374-383.
6. Zhabborov N.M. Morer's theorem and functional series in the class of A -analytic functions, *Siberian Federal University, Maths&Physics*, v. 11(55)2018, 50-59
7. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У., Ш.Я. Хурсанов, Неравенство Шварца и формула Шварца для $A(z)$ -аналитических функций, *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2018, том 64, №4 с.637-649.
8. Ш.Я.Хурсанов. гармонические функции. Вестник НУУз №2/2 2017 с.5-9

**О гомотопически плотных подпространствах пространства
вероятностных мер определенных бесконечных компактах.**

Т.Ф.Жураев, (ТГПУ), Ф.Исматуллаев, (ГулДУ).

e-mail:tursunzhuraev@mail.ru

Известно, что для любого компакта X подпространство $P_\omega(X)$ пространства $P(X)$ всюду плотно в $P(X)$. Для бесконечного компакта X пространство $P_\omega(X)$ выпукло, локально выпукло и σ -компакто. Это означает, что пространство $P_\omega(X)$ является AR пространством. С другой стороны, для любого бесконечного компакта X пространство $\sigma - Z$ - множество в $P(X)[1]$.

Теорема. Для бесконечного компакта X и любого $n \in N$ пространство $P(X) \setminus P_n(X)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Как мы отметили, что для бесконечного компакта X пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу Q . С другой стороны, для $n \in N$ подпространство $P_n(X)$ есть Z -множество в $P(X)$

Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \rightarrow P(X)$ строим формулой полагая

$$h(\mu, t) = (1 - t)\mu + \mu_0 t$$

где, $\mu_0 \in P(X) \setminus P_n(X)$ произвольная фиксированная мера. Для определенности для μ_0 можно взять любую меру сосредоточенную в $(n + 1)$ точках. т.е. $\mu_0 = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_n\delta_{x_n} + m_{n+1}\delta_{x_{n+1}}$ где $m_i > 0$ и $\sum_{i=1}^{n+1} m_i = 1$

Если $t = 0$, $m_0 h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu \in P(X)$ т.е. $h(\mu, 0) = id_{P(X)}$

Если $t > 0$, тогда $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0 \in P(X) \setminus P_n(X)$ так как $supph(\mu, t)$ состоит более чем $(n + 1)$ точек. т.е. $h(\mu, t) \notin P_n(X)$, если $t > 0$. Это означает, что $h(\mu_0, (0, 1]) \in P(X) \setminus P_n(X)$. Теорема доказано.

Из этой теоремы и из определения гомотопически пренебрежимых [2] пространств имеем

Следствие. Для любого $n \in N$ и бесконечного компакта X пространства $P_n(X)$ гомотопически пренебрежимо в $P(X)$.

Литература

[1]. T.F.Zhuraev The spaces of probabilite measures With finite supports is homeomorphic to an infinite –dimensional linear space . in. obshaya Topologiya. Proctranstva I otobrasheniya (General Topology: Spaces and Mappings), Moscow Uni.Press.Moscow, 1989,66-70 (in Russian).

[2]. T.Bankh, T.Radul, M.Zarichnyi Absorbing sets in infinite –dimensional Manifolds. Math. Studies. Monog. Ser.1, VNTI Publ. LVIV, 1996.

Задача Геллерстедта для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа

Джураев Ф.М.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

Краевые задачи типа задачи Трикоми и Геллерстедта для вырождающегося нагруженного уравнения смешанного типа второго порядка исследовались сравнительно мало. Отметим работы В.М.Казиёва [1], Б.Исломов и Ф.Джураева [2]. Исходя из этого, настоящая работа посвящена постановке и исследованию аналог задачи Геллерстедта для нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа, вырождающегося внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - |x|^p u_y - \mu_j u(x, 0), & y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy} + \mu_{j+2} u(x, 0), & y < 0, \end{cases} \quad (1_j)$$

где m, p, μ_j, μ_{j+2} - любые действительные числа, причем

$$m < 0, \quad p > 0, \quad \mu_j > 0, \quad \mu_{j+2} < 0, \quad (j = 1, 2). \quad (2_j)$$

Здесь и далее $x \geq 0$ при $j = 1$, $x \leq 0$ при $j = 2$.

Пусть D - конечная односвязная область плоскости переменных (x, y) , ограниченная при $y > 0$ отрезками $A_1 B_1, B_1 B_2, B_2 A_2, A_2 A_1$ прямых $x = 1, y = 1, x = -1, y = 0$ соответственно, а при $y < 0$ характеристиками

$$\begin{aligned} A_1 C_1 : x + \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} &= 1, & OC_1 : x - \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} &= 0, \\ A_2 C_2 : x - \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} &= -1, & OC_2 : x + \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

уравнения (1_j) , выходящими из точек $A_1(1, 0), A_2(-1, 0), O(0, 0)$.

Из произвольной точки $E_j(x_0, 0)$ ($0 < |x_0| < 1$) проведем характеристики

$$E_j N_j : x + \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = x_0, \quad E_j M_j : x - \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = x_0$$

уравнения (1_j) ($j = 1, 2$).

Введем следующие обозначения: $D_3 = D_{11} \cup D_{21} \cup I_3$,

В области D для уравнения (1_j) исследуем следующая задача:

Задачи G. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,y}^{2,1}(D_{11} \cup D_{21}) \cap C^2(D_{12} \cup D_{22})$;
- 2) $u(x, y)$ является решением уравнения (1_j) в областях D_{j1} и D_{j2} ($j = 1, 2$);
- 3) $u_y \in C(D_1 \cup D_2)$ причем $u_y(x, y)$ может обращаться бесконечность порядок меньше $1 - 2\beta$ при $|x| \rightarrow 0$, и $|x| \rightarrow x_0$, а при $|x| \rightarrow 1$, ограничена;
- 4) $u_x \in C(D_3)$ на линии вырождения I_3 выполняется условия склеивания

$$\lim_{x \rightarrow +0} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow -0} u_x(x, y), \quad (0, y) \in I_3, \quad (3)$$

5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{A_j B_j} = \varphi_j(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (4_j)$$

$$u|_{OM_j} = \psi_j(x), \quad |x| \in \left[0, \frac{x_0}{2}\right], \quad (5_j)$$

$$u|_{E_j N_j} = g_j(x), \quad |x| \in \left[x_0, \frac{x_0 + 1}{2}\right], \quad (6_j)$$

где $\varphi_j(y)$, $\psi_j(x)$, $g_j(x)$, $(j = 1, 2)$ - заданные функции, причем $\psi_1(0) = \psi_2(0)$,

$$\varphi_j(y) \in C(\bar{I}_3) \cap C^1(I_3), \quad (7_j)$$

$$\psi_j(x) \in C^1\left(|x| \in \left[0; \frac{x_0}{2}\right]\right) \cap C^3\left(|x| \in \left(0; \frac{x_0}{2}\right)\right), \quad (8_j)$$

$$g_j(x) \in C^1\left(|x| \in \left[x_0; \frac{x_0 + 1}{2}\right]\right) \cap C^3\left(|x| \in \left(x_0; \frac{x_0 + 1}{2}\right)\right), \quad (9_j)$$

здесь $2\beta = \frac{m}{m-2}$, причем

$$0 < \beta < \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Теорема. Если выполнены условия (2_j) , (7_j) , (8_j) , (9_j) , (10) , то в области D решение задачи G' существует и единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. // "Дифференциальные уравнения". -1978. -Т.14. -№ 1. -С.181-184.

2. Исломов Б., Джураев Ф. Аналог задачи Трикоми для вырождающегося нагруженного уравнения парабола-гиперболического типа. // "Узбекский математический журнал". -2011. -№ 2. -С. 75-85.

О C -вложенности подпространств $\eta_F(X)$ в компактах $F(X)$.

К.Р.Жувонов, (ТИИИМСХ), Еркулов Р.(ТГПУ), Б.Ж. Олимов,
(ГулДУ).

e-mail:Qamariddin.j@mail.ru

Напомним, что $Y \subset X$ является C -вложением в X , если всякая непрерывная вещественная функция определенная на Y , продолжается до непрерывной функции на X [1].

В этой заметке доказано следующая

Теорема. Пусть $F : \text{Compr} \rightarrow \text{Compr}$ нормальный функтор переводящей $AR(M)$ пространства в $AR(M)$ пространство. Тогда η_F C -вложено в $F(X)$ для любого $X \in \text{Compr}$.

Доказательство. Пусть $X \in \text{Compr}$, в силу непрерывности функтора $F : \text{Compr} \rightarrow \text{Compr}$. Компакт $\eta_F(X)$ вложено в $F(X)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f : X \rightarrow R$ - действительная прямая. Отображение $F(f) : F(X) \rightarrow F(R)$ тоже непрерывно. Так как F сохраняет $AR(M)$ пространств, по этому существует ретракция $r_F^R : F(R) \rightarrow R$. Искомыми непрерывными продолжениями являются композиции отображения $F(f)$ и ретракции r_F^R . т.е. $\bar{f} = r_F^R \circ F(f) : F(X) \rightarrow R$. Теорема доказана

Литература

[1]. Yoshizawa Н. On simultancous extension of continuous functions. Proc.Imp.Acad.Tokyo, 1944, V.20. p.653-654.

О полноте равномерных пространств

Канетов Б.Э., Канетова Д.Э.

*Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, г. Бишкек
(Кыргызстан), Жалал-Абадский государственный университет, г. Жалал-Абад
(Кыргызстан)*

e-mail: bekbolot_kanetov@mail.ru

Понятие полноты равномерных пространств является одним из важнейших свойств теории равномерных пространств. Как известно в «природе» встречаются свойства равномерных пространств более «тонкие» нежели полнота-это H -полнота равномерных пространств. В настоящей работе исследуются индекс полноты равномерных пространств.

Равномерное пространство (X, U) называется μ -полным, если всякий фильтр Коши имеющий базу мощности $\leq \mu$ сходится. Фильтр F называется H -фильтром Коши, если $\alpha \cap F \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in H$ [1], [2].

Пусть (X, U) - равномерное пространство и $H \subset U$. Равномерное пространство (X, U) называется $H - \mu$ -полным, если всякий H -фильтр Коши F имеющий базу мощности $\leq \mu$ имеет по крайней мере одну точку прикосновения. $H - \aleph_0$ -полные пространства называются H -секвенциально полными.

Пусть (X, U) - равномерное пространство. Наименьшее кардинальное число τ называется индексом μ -полноты равномерного пространства (X, U) , если существует такая система $H \subset U$, что $|H| = \tau$ и (X, U) является $H - \mu$ -полным.

Индекс μ -полноты равномерного пространства (X, U) обозначается через $ic_\mu(U)$, а индекс секвенциальной полноты равномерного пространства (X, U) обозначается через $ic_{\aleph_0}(U)$.

Равномерное пространство (X, U) называется равномерно локально μ -компактным, если существует равномерное покрытие $\alpha \in U$, состоящее из μ -компактных подмножеств. Равномерно локально $\aleph_0$ -компактные пространства называются равномерно локально счетно компактными.

Теорема 1. Теорема 1. Для равномерного пространства (X, U) следующие условия равносильны:

- 1) $ic_\mu(U) = 1$;
- 2) (X, U) - равномерно локально μ -компактно.

Следствие 1. Для равномерного пространства (X, U) следующие условия равносильны:

- 1) $ic_{\aleph_0}(U) = 1$;
- 2) (X, U) - равномерно локально счетно компактно.

Литературы.

- [1]. Борубаев А.А. Равномерная топология. - Бишкек: Илим, 2013.
- [2]. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. - Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.

Об одной проблеме теории алгоритмических представлений универсальных конгруэнц-простых алгебр

Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: nadim59@mail.ru, indiraazatovna@mail.ru

Со всеми неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в работах Р.Соара [1], Ю.Л.Ершова и С.С.Гончарова [2,3], А.И.Мальцева [4].

Как обычно, всюду определенная функция, действующая из множества натуральных чисел ω в ω называется вычислимой, если существует вычисляющий ее алгоритм ([1]). Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется вычислимым (вычислимо перечислимым, коперечислимым), если его характеристическая функция вычислима (α есть область значений подходящей вычислимой функции, α является дополнением вычислимо перечислимого множества).

Пусть $\langle A; \Sigma \rangle$ — универсальная алгебра эффективной сигнатуры Σ . Отображение ν из множества натуральных чисел ω на A называется нумерацией алгебры A , если существует вычислимое семейство F вычислимых функций, представляющих Σ -операции алгебры A в нумерации ν , т.е. для всякой Σ -операции $\sigma \in \Sigma$ алгебры A найдется такая вычислимая функция $f \in F$, что $\sigma \nu \bar{x} = \nu f \bar{x}$.

Нумерация ν алгебры A называется вычислимой (позитивной, негативной), если ее ядро (т.е. отношение эквивалентности $Ker \nu = \{\langle x, y \rangle | \nu x = \nu y\}$) вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо).

Пусть η — эквивалентность на ω . Подмножество $\alpha \subseteq \omega$ называется η -замкнутым, если $x \in \alpha \wedge x = y \pmod{\eta} \rightarrow y \in \alpha$, т.е. если α является объединением подходящих η -классов; η -замкнутое множество называется η -конечным (η -бесконечным, η -кобесконечным), если оно является объединением конечного числа η -классов (бесконечного, соответственно кобесконечного множества η -классов).

Нумерация ν алгебры A называется отделимой (вычислимо отделимой), если для всякой пары чисел, различных по модулю $Ker \nu$, найдется $Ker \nu$ -замкнутое вычислимо перечислимое (вычислимое) множество, содержащее в точности одно из этих чисел.

Очевидно, что совокупность вычислимо перечислимых (вычислимых) $Ker \nu$ -замкнутых множеств образует базу естественной перечислимой (вычислимой) топологии.

В работе [5] дана следующая структурная характеристика вычислимо отделимо нумерованных алгебр, подчеркивающая исключительную роль негативных алгебр с точки зрения вычислимо отделимых: нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами (под аппроксимируемостью понимается наличие семейства разделяющих морфизмов, см. Ю.Л.Ершов [2]). Из этой характеристики вытекает факт негативности всякой вычислимо отделимо нумерованной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций (далее, для краткости, — АРК-алгебры).

Известно ([6]), что нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами (эффективную отделимость см. также в Ю.Л.Ершов [2]).

Отсюда следует, что всякая отделимая нумерация АРК-алгебры является эффективно отделимой, т.е. алгоритмическая сложность ядра такой нумерации заведомо не выходит за рамки класса Π_2^0 -множеств. С другой стороны, существуют отделимые (даже вычислимо отделимые) нумерованные алгебры с нетеровыми решетками конгруэнций, алгоритмические сложности ядер которых превосходят любую наперед заданную.

Таким образом, алгоритмические сложности ядер отделимых, но не негативных нумераций АРК-алгебр (если они существуют), могут находиться только в относительно узком диапазоне между негативными (Π_1^0 -) и Π_2^0 -нумерациями.

При этом, хотя построить пример отделимой, но не негативной алгебры не представляет труда (тривиальный пример — алгебра пустой сигнатуры, алгоритмически реализуемая связным двоеточием, в котором один элемент представлен вычислимо перечислимым невычислимым множеством, а второй — его дополнением), все известные примеры T_1 -отделимых нумераций АРК-алгебр оказывались негативными, что привело к возникновению предположения о негативности T_1 -отделимых нумераций АРК-алгебр ([6]). Например, простейшей бесконечной T_1 -отделимой АРК-алгеброй является алгебра предшествования $P = \langle \omega; p \rangle$, где $p(n+1) = n, p(0) = 0$ (заметим, что всякая T_1 -отделимая нумерация конечной алгебры вычислима, т.е. в частности, негативна). Негативными также являются любые отделимые нумерации полей ([7]).

Легко показать, что всякая T_2 -отделимая нумерация алгебры P является негативной.

Универсальная алгебра называется конгруэнц-простой, если она не имеет нетривиальных конгруэнций. Например, для групп это равносильно отсутствию нетривиальных нормальных подгрупп, для колец — идеалов и т.п.

В теории универсальных алгебр простые алгебры играют роль основополагающих “атомных” единиц с точки зрения структурной теории этих объектов. Точно так же, роль простых отделимо нумерованных алгебр с точки зрения структурной теории отделимых алгоритмических представлений универсальных алгебр трудно переоценить. В частности, такие представления важны не только в теории алгоритмов, но и в рамках программы Computer Science, связанной с абстрактными типами данных и алгоритмическим заданием сложных систем в интеллектуальных системах.

В [8] анонсирован результат о существовании T_1 -отделимо нумерованной АРК-алгебры, не являющейся негативной. Более того, оказалось, что даже алгебра P имеет такую нумерацию. Однако принципиальный вопрос о существовании конгруэнц-простых алгебр с указанным свойством остается открытым.

С учетом вышесказанного сформулируем актуальную и важнейшую, с точки зрения структурной теории отделимых представлений универсальных алгебр, проблему:

Существует ли T_1 -отделимо нумерованная простая алгебра, не являющаяся негативной?

Литература

- [1]. Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств. Перевод с английского, под ред. М.М. Арсланова, Казанское математическое общество, Казань, 2000, 576 с.
- [2]. Ершов Ю.Л. Теория нумераций, М., Наука, 1977, 416 с.
- [3]. Гончаров С.С., Ершов Ю.Л. Конструктивные модели, Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.
- [4]. Мальцев А.И. Конструктивные алгебры. I. Успехи математических наук, 16 (1961), №3, С.3–60.
- [5]. Касымов Н.Х. Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры. Успехи матем. наук, 1996, 51, №3, С.145–176.
- [6]. Касымов Н.Х. О гомоморфизмах на эффективно отделимые алгебры. Сибирский математический журнал, 57 (2016), №1, С.47–66.
- [7]. Касымов Н.Х., Ибрагимов Ф.Н. Отделимые нумерации тел и эффективная вложимость в них колец. Сибирский математический журнал, 60 (2019), №1, С.82–94.
- [8]. Касымов Н.Х., Морозов А.С. О T_1 -отделимых нумерациях алгебр с артиновыми решетками конгруэнций. Тез. докл. межд. конф. “Алгебра и математическая логика: теория и приложения”, г. Казань, 24–28 июня 2019 г., С.122–124.

Некорректная краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с одной линией вырождения

Хажиев И.

Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Узбекистан
e-mail: h.ikrom@mail.ru

В данной работе изучена начально-краевой задачи для дифференциального уравнений в частных производных второго порядка смешанного типа. Уравнения вырожденного типа или смешанного типа с одной или несколькими линиями изменения были объектом изучения многих авторов (см. [1] и указанную там библиографию). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_{tt}(x, y, t) + \operatorname{sgn} x u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

в области $\Omega = \{-1 < x < 1, x \neq 0, 0 < y < 1, 0 < t < T, T < \infty\}$.

Постановка задачи. Найти функцию являющуюся на пространстве Ω решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются следующие условия: начальные

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (2)$$

граничные

$$\begin{aligned} u(-1, y, t) &= u(1, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) &= u(x, 1, t) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также условия склеивания

$$u(-0, y, t) = u(+0, y, t), \quad u_x(-0, y, t) = u_x(+0, y, t). \quad (4)$$

Исследуемая задача (1) - (4) относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректная задача для подобных уравнений были рассмотрены в работах [2], [3].

При построении решения в виде суммы ряда используется полнота в пространстве L_2 , ортогонально сопряженной с системой собственных функций соответствующей задачи. Доказаны теоремы о единственности решения и его условной устойчивости на множестве корректности. При доказательстве единственности и условной устойчивости используется априорная оценка, которая получена по методу логарифмической выпуклости. Построено приближенное решение методом регуляризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа, М.: Физматлит, 2014.
2. Фаязов К.С. Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. Узбекский математический журнал, 1995 г., №2, -С. 89-93
3. Fayazov K.S., Khajiev I.O. Boundary value problem for the system equations mixed type, Universal Journal of Computational Mathematics 4(4)(2016), 61-66. DOI: 10.12189/ujcmj.2016.040402.

Условия неединственности слабо периодических мер Гиббса для НС-модели

Хакимов Р., Махаммадалиев М.

Наманганский государственный университет

e-mail: rustam-7102@rambler.ru, mmtmuxtor93@mail.ru

Пусть τ^k — дерево Кэли порядка $k \geq 1$, т.е. бесконечное дерево. Известно, что τ^k можно представить как G_k — свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка. Рассмотрим модель, где спин принимает значения из $\Phi = \{0, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$ — конфигурация. Гамильтониан Hard-Core (НС) модели определяется по формуле

$$H(\sigma) = J \sum_{x \in V} \sigma(x), \quad \sigma \in \Omega, \quad J \in \mathbb{R}.$$

Понятие меры Гиббса вводится стандартным образом (см. например, [1]-[2]). Известно [3], что каждой мере Гиббса для НС-модели на дереве Кэли можно сопоставлять совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих

$$z_x = \prod_{y \in S(x)} (1 + \lambda z_y)^{-1},$$

где $\lambda = e^J > 0$ — параметр и $S(x)$ — множество прямых потомков.

Пусть $G_k/\hat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ фактор группа, где $\hat{G}_k$ нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -периодической, если $z_{yx} = z_x$ для $\forall x \in G_k, y \in \hat{G}_k$.

G_k -периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Для любого $x \in G_k$ множество $\{y \in G_k : \langle x, y \rangle\} \setminus S(x)$ имеет единственный элемент, которого обозначим через $x_\downarrow$.

Определение 2. Совокупность величин $z = \{z_x, x \in G_k\}$ называется $\hat{G}_k$ -слабо периодической, если $z_x = z_{ij}$ при $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j$ для $\forall x \in G_k$.

Определение 3. Мера μ называется $\hat{G}_k$ -(слабо) периодической, если она соответствует $\hat{G}_k$ -(слабо) периодической совокупности величин z .

Замечание. В [4] при некоторых условиях доказана единственность слабо периодических мер Гиббса на инвариантном множестве $I_4 = \{(z_1, z_2, z_7, z_8) \in R^4 : z_1 = z_8, z_2 = z_7\}$.

Пусть

$$s^\pm := s^\pm(k) = \frac{k - 3 \pm \sqrt{k^2 - 6k + 1}}{4}, \quad \lambda^\pm := \lambda^\pm(k) = (s^\pm + 1)^k s^\pm.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. При $k \geq 6$, $i = 1$ и $\lambda \in (\lambda^-(k), \lambda^+(k))$ для НС-модели в случае нормального делителя индекса четыре существуют не менее трех слабо периодических мер Гиббса, соответствующих совокупности величин из I_4 . При этом одна из них является трансляционно-инвариантной, другие слабо периодическими (не периодическими) мерами Гиббса.

Литература

1. Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. Москва. "Мир" 1992. с.624.
2. Rozikov U.A. Gibbs Measures on Cayley Trees, World Sci., Singapore 2013.
3. Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network // Queueing Systems, 46, 2004, p. 197–212.
4. Хахимов Р.М. Слабо периодические меры Гиббса для НС-модели для нормального делителя индекса четыре // УкрМЖ, 2015, т. 67, No 10, стр.1409–1422.

Экстент гиперпространства сходящейся под последовательностей

Кобилов Т.А.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

В работе исследуется [4] экстент гиперпространства сходящейся под последовательностей пространства $exp_n X$.

Пусть X - топологическое T_1 -пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $exp X$. Семейство всех множеств вида

$$O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{F : F \in exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n\}$$

где $U_1, U_2, \dots, U_n$ - непустые открытые подмножества пространства X , порождает топологию на множестве $exp X$. Эта топология называется топологией Виеториса. Множество $exp X$ с топологией Виеториса называется экспоненциальным пространством или гиперпространством пространства X .

Пусть X - топологическое T_1 -пространство. Обозначим через $exp_n X$ множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства X мощности, не превосходящей кардинального числа n , т.е. $exp_n X = \{F \in exp X : |F| \leq n\}$. Положим $exp_\omega X = \bigcup \{exp_n X : n = 1, 2, \dots\}$, $exp_c X = \{F \in exp X : F \text{ — компактное подмножество } X\}$. Ясно, что $exp_n X \subset exp_\omega X \subset exp_c X \subset exp X$ для любого топологического пространства X .

Пусть топологическое пространство X не имеет изолированных точек. Для пространства X и для любой точки $x \in X$ через $S_c(X, x)$ обозначим множество всех $\{S \in S_X : \lim S = x\}$ и определим множество $L_X = \{y \in X : S_c(X, x) \neq \emptyset\}$. Ясно, что множество $S_c(X, x) \subset exp_c X \subset exp X$.

Наименьшее кардинальное число $m \geq \aleph_0$ такое, что каждое замкнутое подмножество пространства X , состоящее только из изолированных точек, имеет мощность $\leq m$, называется экстендом (extent) пространства X и обозначается $e(X)$.

Теорема. Пусть топологическое пространство X имеет счетную базу и $S_c(X) \neq \emptyset$. Тогда $e(X) = e(S_c(X, x))$.

Следствие. Пусть $R^n, n \in N$ евклидово пространство. Тогда $e(R^n) = e(S_c(R^n)) = \aleph_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Физматлит. 2006. – 332 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986. – 752 с.
3. Архангельский А.В., Пономарёв В.И. О диадических бикомпактах. ДАН СССР, т. 182, (1968), стр. 993-996.
4. David Maya-Patricia Pellecer-Covarrubias-Roberto Pichardo-Mendoza, Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences, Mathematica Slovaca 68 (2018), No. 2, 431-450

Нормальные функторы и обобщения нормальности

Комбаров А.П. (Россия)

Пусть $\mathcal{F}$ — нормальный функтор степени 3, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений. В.В.Федорчук доказал, что компакт X метризуем, если компакт $\mathcal{F}(X)$ наследственно нормален. Теорема Федорчука является обобщением классической теоремы Катетова о метризуемости компакта, куб которого наследственно нормален. Также хорошо известны: теорема Чобана о том, что если гиперпространство $\text{exp}(X)$ в топологии Вьеториса наследственно нормально, то X метризуемый компакт; и теорема Величко о компактности пространства, гиперпространство которого нормально.

В сообщении рассматриваются различные обобщения нормальности, такие как δ -нормальность (J.Mask), D -нормальность (H.Brandenburg), псевдонормальность (C.Proctor), слабая нормальность (А.В.Архангельский) и другие свойства типа нормальности. В связи с этим приводятся обобщения и аналоги перечисленных выше теорем.

О взаимосвязях между геометриями псевдосфер в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах

Костин А.В.

Казанский федеральный университет, Елабужский институт

В работе рассматриваются свойства различных аналогов псевдосферы Бельтрами-Миндинга в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. На некоторых из них индуцируется геометрия постоянной отрицательной кривизны с положительно определенной метрикой, на других метрикой псевдоевклидова пространства индуцируется индефинитная метрика постоянной кривизны, то есть метрика идеальной области плоскости Лобачевского. Геометрия идеальной области плоскости Лобачевского двойственна геометрии собственной области в том смысле, что углу между прямыми собственной области соответствует расстояние между точками идеальной области, а расстоянию между точками собственной области соответствует угол между эллиптическими прямыми идеальной области плоскости Лобачевского. Некоторые аналоги этой двойственности есть и во внешней геометрии псевдосферы Бельтрами-Миндинга и ее псевдоевклидовых аналогов. Многие свойства, касающиеся внешней геометрии псевдосферы и ее псевдоевклидовых аналогов являются общими [?], [?].

References

- [1]. Костин А. В. Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях // Владикавказский мат. журн. — 2019. — **21**. — № 1. — С. 16–26.
- [2]. Костин А. В., Костина Н. Н. Об интерпретации асимптотических направлений // Современная геометрия и ее приложения: Сборник трудов Международной молодежной школы-семинара и Международной научной конференции. — 2017. — Казань. — Изд-во Казан. ун-та. — С. 75–76 .

Обобщения задачи о тени в гиперболическом пространстве

Костин А.В., Костина Н.Н.

Казанский федеральный университет, Елабужский институт

В работе рассматривается задача о тени в пространстве Лобачевского и ее обобщения. Эту задачу можно рассматривать как задачу о нахождении условий, обеспечивающих принадлежность точек обобщенно выпуклой оболочке семейства шаров разных типов в гиперболическом пространстве. Широкий спектр задач такого типа в евклидовом пространстве, а также в комплексном и гиперкомплексном пространствах рассматривался Ю.Б. Зелинским и его коллегами [?]-[?]. Первоначальная постановка задачи принадлежит Г. Худайберганову [?]:

какое минимальное число попарно не пересекающихся шаров с центрами на $(n-1)$ -мерной сфере n -мерного евклидова пространства и радиуса меньшего, чем радиус сферы, достаточно для того, чтобы любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров.

Ю.Б. Зелинский расширил постановку задачи. Кроме принадлежности точки 1-выпуклой оболочке семейства шаров предложил изучать условия принадлежности точек m -выпуклой и m -полувывпуклой оболочке семейства шаров и множеств с непустой внутренностью (необходимые определения имеются в цитированных работах). Ряд задач такого типа в пространстве Лобачевского рассмотрен в статье [?]. В работе будут описаны как общие с евклидовыми, так и специфические, характерные только для гиперболического пространства, условия принадлежности точек обобщенно выпуклым оболочкам семейств шаров.

References

- [1]. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Дакхил Х. К. Задача о тени и смежные задачи // Proceedings of the International Geometry Center. — 2016. — **9**. — № 3–4. — С. 50–58.
- [2]. Выговская И. Ю., Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В. Обобщенно выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**. — № 12. — С. 1658–1666.
- [3]. Зелинский Ю. Б., Стефанчук М. В. Узагальнення задачі про тінь // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**. — № 6. — С. 757–762.
- [4]. Zelinskii Y. B. Generalized convex envelopes of sets and the problem of shadow // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — **211**. — № 5. — P. 710–717.
- [5]. Zelinskii Y. B. Problem of shadow (complex case) // Advances in Mathematics: Scientific Journal. — 2016. — **5**. — № 1. — P. 1–5.
- [6]. Zelinskii Y. B. The Problem of the shadows. Bulletin de la société des sci. et lettres de Łódź — 2016. — **66** — P. 37.
- [7]. Худайберганов Г. Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНТИ. — 1982. — **21**. — С. 1772–85.
- [8]. Kostin A. V. Problem of Shadow in the Lobachevskii Space // Ukrainian Mathematical Journal.—2019 — Vol. 70, No. 11 —P. 1758-1766

О спектральных разложениях кусочно-гладких функций

Кучков Э. И.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: e_kuchkov@mail.ru

Пусть $\Omega \subset R^N$ – произвольная ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^\infty$ и пусть $q(x)$ – неотрицательная функция из класса $L_2(\Omega)$. Предположим, что функция $q(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \sup_{x \in \Omega} \left\{ \int_{|y-x| \leq h} |q(y)|^2 |y-x|^{2-N} dy \right\} = 0, \quad N \geq 3 \quad (1)$$

Обозначим через $L(x, D)$ оператор Шредингера $L(x, D) = -\Delta + q(x)$ с областью определения $C_0^\infty(\Omega)$. Пусть оператор H одно из самосопряженных расширений оператора L с дискретным спектром. Согласно теореме Фридрихса, такое расширение всегда существует. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ собственные значения и $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ соответствующие собственные функции оператора H т. е. $Hu_n(x) = \lambda_n u_n(x)$. Известно, что система собственных функций $\{u_n(x)\}$ оператора H образует ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$.

Согласно спектральной теореме Дж. фон Неймана, самосопряженный оператор H представляется в виде

$$H = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda,$$

где E_λ – соответствующее разложение единицы. В соответствии с теоремой Л.Гординга, проекторы E_λ являются интегральными операторами:

$$E_\lambda f(x) = \int_\Omega \Theta(x, y, \lambda) f(y) dy,$$

где $\Theta(x, y, \lambda)$ – спектральная функция оператора H .

Функцию $f(x)$ будем называть кусочно-гладкой, если она обращается в нуль вне некоторой подобласти G области Ω с компактной гладкой границей $S = \partial G \subset \Omega$, равномерно непрерывна в G и имеет равномерно непрерывные в G производные до порядка l , $l \geq 2$. Таким образом, S содержит множество всех точек разрыва функции $f(x)$ и может совпасть с ним.

Для любого $s > 0$ введем средние Рисса спектральных разложений

$$E_\lambda^s f(x) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^s f_n u_n(x)$$

Теорема. Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условию (1) и пусть $f(x)$ кусочно-гладкая функция в трехмерной области Ω . Тогда на каждом компактном подмножестве области гладкости $f(x)$ средние Рисса спектрального разложения $f(x)$ равномерно ограничены, а средние Рисса порядка $s > \frac{N-3}{2}$ равномерно сходятся к $f(x)$.

Доказательства теоремы проводятся методами разработанными В.А. Ильиным и Ш.А.Алимовым (см [1-3]) на основе формулы среднего значения для собственных функций.

Литературы

[1] Ильин В.А. Теорема о разложимости кусочно-гладкой функции в ряд по собственным функциям произвольной двумерной области // ДАН. СССР. 1956. №3(109). – С. 442–445.

[2.] Алимов Ш.А. О спектральных разложениях кусочно-гладких функций // ДАН Россия. 2001. №1(381). – С.7–9.

[3.] Alimov Sh.A. Sets of uniform convergence of Fourier expansion of a piecewise smooth function // The Journal of Fourier Analysis and Applications. 2004. №6 (10). – P.635–644.

О взаимосвязи функторов емкостей и положительно-однородных функционалов

Курбанов Х. Х.

*Академия Вооруженных Сил Республики Узбекистан
e-mail: qhamid_83@mail.ru*

Емкостью на компакте X называется [1, 2] функция $c: \exp X \cup \{\emptyset\} \rightarrow [0, 1]$, для которой выполняются следующие три свойства: 1) $c(\emptyset) = 0$, $c(X) = 1$; 2) если $F \subset G$, то $c(F) \leq c(G)$, где $F, G \in \exp X \cup \{\emptyset\}$; 3) если $c(F) < a$, то существует такое открытое множество $U \supset F$, что для каждого замкнутого $U \subset F$ выполнено неравенство $c(F) < a$. Каждой емкости c соответствует интеграл Шоке I_c на $C_+(X)$, определенный равенством $I_c(\varphi) = \int \varphi(x)dc(x) = \int_0^{+\infty} c(\{x \in X : \varphi(x) \geq t\})dt$, $\varphi \in C_+(X)$. Для произвольной непрерывной функции φ на X интеграл Шоке определяется формулой

$$I_c(\varphi) = \int \varphi(x)dc(x) = \int_0^{+\infty} c(\{x \in X : \varphi(x) \geq t\})dt - \int_{-\infty}^0 (1 - c(\{x \in X : \varphi(x) \geq t\}))dt.$$

Интеграл Шоке I_c обладает следующими пятью свойствами: (1) $I_c(\varphi) \geq 0$ для каждой $\varphi \in C_+(X)$; (2) $I_c(\alpha_X) = \alpha$ для каждого $\alpha \in \mathbb{R}_+$; (3) $I_c(k\varphi) = kI_c(\varphi)$ для произвольных $\varphi \in C_+(X)$ и $k \in \mathbb{R}_+$; (4) $I_c(\varphi + \psi) = I_c(\varphi) + I_c(\psi)$ для произвольной пары $\varphi, \psi \in C_+(X)$ такой, что $(\varphi(x_1) - \varphi(x_2))(\psi(x_1) - \psi(x_2)) \geq 0$ при всех $x_1, x_2 \in X$; (5) $I_c(\varphi) \leq I_c(\psi)$ для каждой пары $\varphi, \psi \in C_+(X)$, такой, что $\varphi \leq \psi$. Из свойств (1) – (5) вытекает, что $I_c(\varphi + \alpha_X) = I_c(\varphi) + \alpha$ для всех $\varphi \in C_+(X)$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Каждый функционал $i: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами (1) – (5) является интегралом Шоке для единственной емкости c на X , определенной равенством $c(F) = \inf\{i(\varphi) : \varphi \in C_+(X), \varphi \chi_F \geq \chi_F\}$. Множество всех емкостей на компакте X обозначают через $M(X)$. Отождествляя каждую емкость c с соответствующим интегралом Шоке I_c , можно считать, что $M(X) \subset \mathbb{R}^{C_+(X)}$. Наделим $M(X)$ топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^{C_+(X)}$, т. е. топологией поточечной сходимости. В данной заметке анонсируем следующие результаты.

Предложение 1. Для всякого компакта X пространство $M(X)$ емкостей на X является подпространством компакта $ОН(X)$ положительно-однородных функционалов.

Более того, этот результат обобщается на функториальный уровень.

Теорема 1. Функтор емкостей M является подфунктором функтора $ОН$ положительно-однородных функционалов.

Литература

[1]. Заричный М. М., Никифорчин О. Р. Функтор емкостей в категории компактов. //Математический сборник. 2008. Т. 199. № 2. 3-26.

[2]. Заитов А. А. Слабо аддитивные функционалы на топологических пространствах. //Диссертация на соискание д.ф.-м.н., Институт Математики и информационных технологий, Ташкент, 2010.

Динамика некоторых квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа

К.А.Курганов,Ф.А.Юсупов.

Национальный университет Узбекистана

e-mail: farrikhuyusupovchambil@mail.ru

Квадратичный стохастический оператор вольтерровского типа (к.с.о.в.т),определенный в симплексе

$$S^6 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_7) \in R^7 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^7 x_i = 1\}$$

имеет вид:

$$V : x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i), k = \overline{1, m}, \text{ где } a_{ki} = -a_{ik}, |a_{ki}| \leq 1, k, i = \overline{1, m} \quad (1).$$

К.с.о.в.т V называется регулярным, если для любого $x \in S^{m-1}$ существует единственная неподвижная точка $x^* \in S^{m-1}$ (т.е. $Vx^* = x^*$), такое что $\lim_{x \rightarrow \infty} V^n x = x^*$, где $\{V^n x\}$ траектория точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

К.с.о.в.т V называется эргодичным, если для любого $x \in S^{m-1}$ существует предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k x$.

Рассмотрим к.с.о.в.т. вида:

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1[1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4] \\ x'_2 = x_2[1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 + a_{24}x_4] \\ x'_3 = x_3[1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{34}x_4] \\ x'_4 = x_4[1 - a_{14}x_1 - a_{24}x_2 - a_{34}x_3] \end{cases} \quad (2),$$

где $a_{ki} \in [0, 1]$

К.с.о.в.т (2) имеет кроме вершин $M_1(1, 0, 0, 0)$, $M_2(0, 1, 0, 0)$, $M_3(0, 0, 1, 0)$, $M_4(0, 0, 0, 1)$ неподвижную точку $C'(\frac{a_{23}}{\Delta}, \frac{a_{13}}{\Delta}, \frac{a_{12}}{\Delta}, 0)$ где $\Delta = a_{12} + a_{13} + a_{23}$.

Следствие. Если к.с.о.в.т имеет вид:

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1[1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1m}x_m] \\ x'_2 = x_2[1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots + a_{2m}x_m] \\ \\ x'_m = x_m[1 - a_{1m}x_1 - a_{2m}x_2 - a_{3m}x_3 + \dots + a_{(m-1)m}x_{m-1}] \end{cases} \quad (3)$$

Пусть к.с.о.в.т V имеет вид:

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1[1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - a_{14}x_4] \\ x'_2 = x_2[1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 + a_{24}x_4] \\ x'_3 = x_3[1 - a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{34}x_4] \\ x'_4 = x_4[1 + a_{14}x_1 - a_{24}x_2 - a_{34}x_3] \end{cases} \quad (4),$$

К.с.о.в.т (4) кроме вершин симплекса M_1, M_2, M_3, M_4 имеет ещё две неподвижные точки $C(\frac{a_{23}}{\Delta_1}, \frac{a_{13}}{\Delta_1}, \frac{a_{12}}{\Delta_1}, 0)$, $C(\frac{a_{34}}{\Delta_1}, 0, \frac{a_{14}}{\Delta_1}, \frac{a_{13}}{\Delta_1})$, где $\Delta_1 = a_{13} + a_{14} + a_{34}$

Теорема 2. К.с.о.в.т (4) Неэргодичен.

References

- [1]. M. I. Zakharevich, Uspekhi Mat. Nauk 33:6 (1978), 207–208; English transl., Russian Math.Surveys 33:6 (1978), 265–266.
- [2]. К.А.Курганов. Асимптотическое поведение траекторий дискретных динамических систем, порожденных квадратичными стохастическими операторами вольтерровского типа. Канд. Дисс. АН. Р. Узбекистан. Институт математики имени В.И. Ромоновского .1994 г.
- [3]. N.Ganikhodjaev,R.Ganikhodjaev,U.Jamilov,Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics,Ergod.Th.and Dynam.Sys.35(5)(2015)1443-1473.

О равенстве размерностей для пространства Нагаты

Лейбо И.М.

e-mail: imleibo@mail.ru, Moscow

The following theorem generalizes the theorem reported by the author at the conference: International Conference Set-Theoretic Topology and Topological Algebra in honor of professor Alexander Arhangel'skii on his 80-th birthday [2].

In the theory of dimension, the concept of a network introduced by Professor A. V. Arkhangel'skii plays a large role as the properties of paracompact σ -spaces [1].

Theorem. Let a space X is a Nagata space (i.e. stratifiable and semimetrizable). Then the following conditions are equivalent:

a). $\dim X < n$.

- b). $\text{Ind} X \leq n$.
 c). $X = \bigcup X_i$, $i=0,1,2,\dots,n+1$, where each set X_i is G_σ and $\dim X_i \leq 0$,
 for $i=1,2,\dots,n+1$.
 d). the space X is a $\leq(n+1)$ -to-one image of a zero-dimensional Nagata space under a perfect map.

All methods and results necessary to prove the theorem are contained in [3].

From Theorem (d) we have:

Corollary. Every Nagata space has a σ -closure-preserving S-network.

REFERENCES

- [1] A. V. Arkhangel'skij, "Classes of topological groups," Uspekhi Mat. Nauk 36 (3 (219)), 127-146 (1981) [Russian Math. Surveys 36 (3), 151-174 (1981)].
 [2] I.M. Leibo, "On the dimension of some semi-metric spaces," Conf. Set-Theoretic Top. and Top. Algebra, Moscow, pp.36-37, 2018.
 [3] I.M. Leibo, "On the Dimension of Preimages of Certain Paracompact Spaces," Mathematical Notes, 2018, Vol. 103, No. 3

О гомотопически плотных подпространствах пространства всех вероятностных мер с конечными носителями.

М.М.Мадиримов, (ТГПУ), М.М. Баракаев, (ТГПУ), У.М.Санакулов
 (ТГПУ).

e-mail: murod.barakayev.1958@mail.ru

В данной заметке для функтора P и его подфункторов P_n и P_ω [1] в категории компактов и непрерывных отображений в себя, доказывается:

Теорема. Для любого бесконечного компакта X и для любого $n \in N$ подпространство $P_\omega(X) \setminus P_n(X)$ гомотопически плотно в $P_\omega(X)$

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и $n \in N$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P_\omega(X) \times [0, 1] \rightarrow P_\omega(X)$ строим полагая

$$h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0 \quad .$$

где μ_0 произвольная мера из множества $P_{n+2}(X) \setminus P_{n+1}(X)$ т.е. $\mu_0 \in P_{n+2}(X) \setminus P_{n+1}(X)$

$$\mu_0 = m_1 \delta_{x_1} + m_2 \delta_{x_2} + \dots + m_{n+2} \delta_{x_{n+2}}, \quad \sum_{i=1}^{n+2} m_i = 1 \quad m_i > 0$$

Если $t = 0$, тогда $h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$ Значит, $h(\mu, 0) = id_{P_\omega(X)}$

Если $t > 0$, тогда $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0 \in P_n(X)$ так как $|\sup ph(\mu, t)| \leq n + 1$. Значит для любого $t \in (0, 1]$ мера $h(\mu, t)$ принадлежит подпространству $P_\omega(X) \setminus P_n(X)$. Что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. Для любого $n \in N$ и любого бесконечного компакта X подпространство $P_n(X)$ гомотопически пренебрежимо в $P_\omega(X)$.

В работе [2] имеется следующая

Предложение [2] Допустим X есть ANR пространство $Y \subset X$ гомотопически плотно в X .

Тогда Y есть ANR пространство.

Из этого предложение [2] и теоремы вытекает.

Следствие 2. Для любого бесконечного компакта X и любого $n \in \mathbb{N}$ подпространства $P(X) \setminus P_n(X)$, является ANR пространством.

Следовательно, в силу выпуклости этих подпространств они являются стягиваемыми AR пространствами. т.е. Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого бесконечного компакта X пространства $P(X) \setminus P_n(X)$ и $P_\omega(X) \setminus P_n(X)$ является AR пространствами. С другой стороны имеет место $P_\omega(X) \setminus P_n(X) \subseteq P(X) \setminus P_n(X)$

Литература

[1]. Федорчук ВВ. Вероятностные меры в топологии Успехматнаук, 1991, Т.46, вып. 1, с.41-80

[2]. TBankh, TRadul, MZarichnyi Absorbing sets in infinite –dimensional Manifolds. Math. Studies. Monog. Ser.1, VNTI Publ. LVIV, 1996.

Критерии плюригармоничности M – гармонических функций

Мадрахимов Р.М., Омонов О.И.

Национальный Университет Узбекистана

Филиал ТИИИМСХ в Карши, Карши, Узбекистан

e-mail: 8368.qar.mill13@mail.ru

Пусть D –фиксированная область в $\mathbb{C}^n$. Хорошо известно что, функция $u \in C^2(D)$ называется гармонической (субгармонической) в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если она всюду в D удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (\Delta u < 0), \quad \Delta u = 4 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}.$$

Функция u называется n –гармонической, если u –гармоническая по каждому переменному в отдельности. Функция u должна удовлетворять n уравнениям $\Delta_j u = 0$ ($j = 1, \dots, n$).

Она $u \in C^2(D)$ называется плюригармонической в D , если она удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Введем понятия M –гармонической функции.

Определение 1. Пусть B –единичный шар в $\mathbb{C}^n$. Функция $u \in C^2(B)$ называется M –гармонической (M –субгармонической) в B , если $\tilde{\Delta} u = 0$ ($\tilde{\Delta} u < 0$), где $\tilde{\Delta} u = (1 - |z|^2)(\Delta u - 4 \sum_{i,j=1}^n z_i \bar{z}_j \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j})$ инвариантный лапласиан в B (см. [1] стр. 54-66).

Как известно, одновременно, гармоническая и плюрисубгармоническая функция является плюригармонической.

У. Рудин в работе [3] получил следующий результат: если функция $u(z)$ гармоническая и M -гармоническая в B , то $u(z)$ плюригармоническая в B .

Р. Мадрахимов и М. Ваисова в работе [4] доказали, что: если функция $u(z)$ гармоническая и M -субгармоническая в B , то $u(z)$ плюригармоническая в B .

Основным результатом данной работы является следующая:

Теорема 1. Пусть B -единичный шар в $\mathbb{C}^n$ и $u(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Функция $u(z)$ субгармоническая в B ;
2. Функция $u(z)$ M -гармоническая в B .

Тогда $u(z)$ плюригармоническая в B .

Вопрос. Является ли субгармоническая и M -субгармоническая в B , функция $u(z)$ плюрисубгармонической.

Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает следующий пример полинома

$$u(z) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_3 \bar{z}_3, \quad z \in B \subset \mathbb{C}^3.$$

Поскольку $\Delta u = 4 > 0$ и $\tilde{\Delta} u = 4(1 - |z|^2)(1 - u) > 0$, но $u(z)$ не является плюрисубгармонической в B , ибо $u(0, 0, z_3) = -|z_3|^2$ не является субгармонической в $B \cap \{z_1 = 0, z_2 = 0\}$.

Для поликруга $U^n \subset \mathbb{C}^n$ имеет место аналогично определение.

Определение 2. Пусть U^n -единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$. Функция $u \in C^2(U^n)$ называется M -гармонической (M -субгармонической) в U^n , если $\tilde{\Delta} u = 0$ ($\tilde{\Delta} u \leq 0$), где $\tilde{\Delta} u = 2 \sum (1 - |z_i|^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i}$ инвариантный лапласиан в U^n (см.[2], стр.24-25).

Если функция $u(z)$ является n -гармонической в U^n , то $u(z)$ является M -гармонической в U^n . Таким образом, функция C^2 является n -гармонической в U^n , если только и только $\tilde{\Delta} u_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Теперь мы приведем пример функции, удовлетворяющей $\tilde{\Delta}_{U^n} u = 0$, но не являющейся n -гармонической в U^n .

Для $z \in U$, $\omega \in T$, пусть

$$P(z, \omega) = \frac{(1 - |z|^2)}{|1 - z\bar{\omega}|^2}$$

обозначим ядро Пуассона в U .

Как мы увидим, для фиксированной $\omega \in T$, $\alpha > 0$

$$\tilde{\Delta} P^\alpha(z, \omega) = 2\alpha(\alpha - 1) P^\alpha(z, \omega)$$

Пусть $\alpha_i = \lambda_i + \frac{1}{2}$ будет $i = 1, 2$. То

$$\tilde{\Delta}_i P^{\lambda_i + \frac{1}{2}}(z_i, \omega_i) = 2 \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{4} \right) P^{\lambda_i + \frac{1}{2}}(z_i, \omega_i).$$

Таким образом, если $F(z_1, z_2) = P^{\lambda_1 + \frac{1}{2}}(z_1, \omega_1) P^{\lambda_2 + \frac{1}{2}}(z_2, \omega_2)$,

$$\tilde{\Delta}_{U^2} F(z_1, z_2) = 2 \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \frac{1}{2} \right) F(z_1, z_2).$$

Следовательно, для любого λ_1, λ_2 , удовлетворяющего $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}$, то $\tilde{\Delta}_{U^2} F(z_1, z_2) = 0$. Если λ_1 и λ_2 не равны $\frac{1}{2}$, функция $F(z_1, z_2)$ не является 2-гармонической в U^2 .

Теорема 2. Пусть $U^2 \subset \mathbb{C}^2$ и функция $u(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. функция $u(z)$ гармоническая в U^2 ;
2. функция $u(z)$ M -гармоническая в U^2 .

Тогда $u(z)$ 2-гармоническая в U^2 .

Литература

1. У. Рудин Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. // М. Мир. 1984.
2. M. Stoll, Invariant potential theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, London Mathematical Society Lecture Note Series, 199. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
3. Rudin Walter. Pluriharmonic function in balls // Proceedings of the American Mathematical Society. 1977, V.62, — 1, pp. 44-46.
4. R. M Madrakhimov, M. D. Vaisova Criteria n -harmonicity and pluriharmonicity of harmonic functions // УзМЖ. — Ташкент, 2009. — N 1.—С. 107-111.

К задаче преследования в линейных дифференциальных играх

Мамадалиев Н.А.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

e-mail: M_numana59@mail.ru

Аннотация. В данной работе изучены дифференциальная игра преследования, описываемая системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа при геометрическими ограничениями на управления игроков. Предлагается достаточное условие на параметры процесса для завершения игры за определенное конечное время. Данная работа примыкает к исследованиям [2,3].

1. Постановка задачи. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается дифференциальная игра преследования описываемая системой линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [1]:

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \dot{z}(t - h_i) + \sum_{i=1}^m B_i z(t - h_i) - Cu(t) + Dv(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n, n \geq 1; A_i (i = 1, 2, \dots, m), B_i (i = 1, 2, \dots, m), C, D$ — постоянные квадратные матрицы, размерности которых $(n \times n), (n \times n), (n \times p), (n \times q)$, соответственно; $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_m$ — константы; $u \in P \subset \mathbb{R}^p, v \in Q \subset \mathbb{R}^q$, — управляющие векторы. P и Q — компакты. Вектором $u(t)$ распоряжается догоняющий объект, вектором $v(t)$ распоряжается убегающий объект.

Произвольные измеримые функции $u = u(t), v = v(t), 0 \leq t < +\infty$, удовлетворяющие ограничениям вида $u \in P, v \in Q$ назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество в виде цилиндра $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 — выпуклое компактное подмножество подпространства L , где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Начальным положением для преследования (1) является n — мерная абсолютно непрерывная функция $\varphi(t)$, определенная на отрезке $[-h_m, 0]$.

Преследование начинается из начального положения $\varphi(\cdot)$ и считается законченным в момент времени $\tilde{t} = \tilde{t}[\varphi(\cdot)]$, когда фазовая точка $z(t)$ впервые попадает на множество $M : z(\tilde{t}) \in M$. Цель убегающего игрока состоит в том, чтобы по возможности оттянуть окончание игры.

Через $K(t), -\infty < t \leq \tau$, — обозначим матричную функцию, обладающую следующими свойствами [1;3]: а) $K(t) = \tilde{0}, t < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n ; б) $K(0) = E_n$, где E_n — единичная матрица порядка n ; в) функция $\sum_{i=1}^m A_i z(t - h_i)$ непрерывна на $C^1[0, \tau]$; г) $K(t)$ при $t > 0$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{K}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=1}^m B_i K(t - h_i). \quad (2)$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а)–г) могут быть доказаны обычным методом последовательного интегрирования уравнения (2).

Пусть допустимые управления $u = u(t), v = v(t)$, выбраны на отрезке $[0, \tau], \tau > 0$, тогда для решения $z(t)$ уравнения (1) при начальном условии $z(t) = \varphi(t), -h_m \leq t \leq 0$, имеется следующее представление [1;3]

$$\begin{aligned} z(\tau) = & - \sum_{i=1}^m K(\tau - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) B_i [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt - \\ & - \int_0^\tau K(\tau - t) [C u(t) - D v(t)] dt. \end{aligned}$$

Определение. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = T(\varphi(\cdot)), 0 \leq T < +\infty$, если существует функция $u(t, v), 0 \leq t < +\infty, v \in \mathbb{R}^q, u(t, v) \in \mathbb{R}^p$, что для произвольной суммируемой с квадратом функции $v(t), 0 \leq t < +\infty, v(t) \in \mathbb{R}^q$, удовлетворяющей неравенству $\|v(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \sigma$, функция $u(t) = u(t, v(t)), 0 \leq t < +\infty$, является функцией с суммируемым квадратом, удовлетворяет неравенству $\|u(\cdot)\|_{L_2[0, +\infty)} \leq \rho$ и траектория $z(t), 0 \leq t < +\infty$, уравнения (1) с учетом начального условия $z(t) = \varphi(t), -h_m \leq t \leq 0$, до момента T попадает на терминальное множество M при некотором $t = t^* \in [0, T]$, т.е. удовлетворяет включению $z(t^*) \in M$. При этом для построения управляющего вектора $u(t)$ в каждый момент времени t используются функции $z(s), t - h_m \leq s \leq t, v(s), 0 \leq s \leq t$.

Целью настоящей работы является получение некоторых достаточных условий при выполнении которых для данного начального положения $\varphi(\cdot)$, из которых в игре (1) гарантируется возможности завершение преследования за конечное время T .

2. Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L , а через $X \ast Y = \{x : x+Y \subset X\} = \bigcup_{y \in Y} (X-y)$ — геометрическую разность (разность Минковского) множеств X и Y , $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ [2].

Пусть $F(t) : L \rightarrow L$, $t \in [0, \tau]$ — квадратная матрица размерности ν , $\nu = \dim L$, полунепрерывная сверху, зависящая от t и $M_2(\tau)$ выпуклое компактное подмножество подпространства L , определенное следующим образом

$$M_2(\tau) = M_1 \ast \int_0^\tau \left[E_\nu - F(\tau-t) \right] \pi K(\tau-t) DQ dt,$$

где E_ν — единичная матрица порядка ν .

Пусть $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, — произвольное измеримое замкнутозначное многозначное отображение, удовлетворяющее условию $\int_0^\tau M(t) dt \subset M_2(\tau)$ [3].

Введем следующее множество

$$\hat{w}(M(t), t) = \left[M(\tau-t) + \pi K(\tau-t) CP \right] \ast F(\tau-t) \pi K(\tau-t) DQ.$$

Предположение 1. *Существуют матрица $F(t)$ и многозначное отображение $M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такие, что для всех $t \in [0, \tau]$ непусты множества $M_2(\tau)$, $\hat{w}(M(t), t)$.*

Введем множество

$$W(\tau) = \int_0^\tau \hat{w}(M(t), t) dt, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad W(0) = M_1. \quad (3)$$

Зафиксируем некоторое начальное положение $\varphi(\cdot)$. Введем в рассмотрение следующую вектор – функцию

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = - \sum_{i=1}^m K(\tau - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) B_i [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt - f_1(\tau),$$

где $f_1(\tau) \in W(\tau)$. В соответствии с определением интеграла (3) существует измеримый по Борелю суммируемый селектор $\tilde{w}(t) \in \hat{w}(M(t), t)$, $0 \leq t \leq \tau$, такой, что имеет место равенство $f_1(\tau) = \int_0^\tau \tilde{w}(\tau-t) dt$, зафиксируем его. Тогда вектор – функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)]$ имеет вид

$$\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = - \sum_{i=1}^m K(\tau - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=1}^m \int_{-h_i}^0 K(\tau - t - h_i) B_i [A_i \dot{\varphi}(t) + B_i \varphi(t)] dt - \int_0^\tau \tilde{w}(\tau-t) dt.$$

Легко показать, что если для некоторого положительного τ функция $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] = 0$, то задача преследования разрешима к моменту τ . В дальнейшем предполагается, что $\xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0$ для всех $\tau \geq 0$. Положим

$$\eta[\tau, \varphi(\cdot)] = \frac{\xi[\tau, \varphi(\cdot)]}{|\xi[\tau, \varphi(\cdot)]|}, \quad \xi[\tau, \varphi(\cdot)] \neq 0.$$

Далее, определим числовую функцию $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v)$ следующим образом [3]:

$$\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) = \sup \left\{ \lambda \geq 0 : \lambda \eta[\tau, \varphi(\cdot)] \in \left[M(\tau - t) + \pi K(\tau - t)CP \right] - \right. \\ \left. - F(\tau - t)\pi K(\tau - t)Dv - \tilde{w}(\tau - t) \right\},$$

обозначим через $\lambda(\varphi(\cdot), \tau, t) = \inf \{ \lambda(\varphi(\cdot), \tau, t, v) : v \in Q \}$.

Предположение 2. Для начального положения $\varphi(\cdot)$ существует число $\tau = \tau_1(\varphi(\cdot)) > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$|\xi[\tau_1, \varphi(\cdot)]| \leq \int_0^{\tau_1} \lambda(\varphi(\cdot), \tau_1, t) dt.$$

Теорема. Если выполнены условия предположений 1 и 2, то в игре (1) из заданного начального положения $\varphi(\cdot)$ возможно завершение преследования за время $T = \tau_1(\varphi(\cdot))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Кук К., *Дифференциально-разностные уравнения*, (Наука, М., 1967).
2. Понтрягин Л.С. *Избранные научные труды*. Т.2. (Наука, М., 1988).
3. Мамадалиев Н.А. О задачах преследования в линейных дифференциальных играх при наличии запаздываний // Изв. вузов. Матем., №6, 16-22 (2010).

Описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом имеющий характеристический последовательность (m_1, m_2)

Мамадалиев У. Х.

Национальный Университет Узбекистана

e-mail: mamadaliyevuktamjon@mail.ru

В данной работе описаны алгебры Лейбница с нильрадикалом, имеющую характеристическую последовательность (m_1, m_2) .

Для определений и предварительных результатов мы ссылаемся на [1, 2].

Пусть L - нильпотентная алгебра Лейбница и пусть $x \in L \setminus L^2$. Для нильпотентного оператора правого умножения $\mathcal{R}_x$ рассмотрим убывающую последовательность $C(x) = (m_1, \dots, m_s)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора $\mathcal{R}_x$. На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок.

Определение 1. Последовательность

$$C(L) = \max_{x \in L \setminus [L, L]} C(x)$$

называется *характеристической последовательностью* алгебры L .

Рассмотрим нильпотентную алгебру Лейбница N с характеристической последовательностью $C(N) = (m_1, m_2)$, $m_1 \geq m_2 > 1$ и с таблицей умножений имеющий следующий вид:

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \leq i \leq m_1 - 1, \\ [f_i, e_1] = f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m_2 - 1, \end{cases}$$

где $\{e_1, \dots, e_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}\}$ базис алгебры N .

Предложение 1. Всякое дифференцирование алгебры N имеет вид

$$\begin{aligned} d(e_i) &= i\alpha_{1,1}e_i + \sum_{j=i+1}^{m_1} \alpha_{1,j-i+1}e_j + \sum_{j=i}^{m_2} \alpha_{2,j-i+1}f_j, \quad 1 \leq i \leq m_2, \\ d(e_i) &= i\alpha_{1,1}e_i + \sum_{j=i+1}^{m_1} \alpha_{1,j-i+1}e_j, \quad m_2 + 1 \leq i \leq m_1, \\ d(f_i) &= \sum_{j=m_1-m_2+i}^{m_1} \beta_{1,j-i+1}e_j + ((i-1)\alpha_{1,1} + \beta_{2,1})f_i + \sum_{j=i+1}^{m_2} \beta_{2,j-i+1}f_j, \quad 1 \leq i \leq m_2. \end{aligned}$$

Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница, следовательно, R можно записать как сумму векторных пространств $R = N + Q$, где N - нильрадикал в R и Q - дополняющее векторное пространство.

Предложение 2.[2] Пусть R - разрешимая алгебра Лейбница. Тогда размерность Q не превышает максимального числа ниль-независимых дифференцирований N .

Из предложения 1 можно установить, что число ниль-независимых дифференцирований равно 2.

Для разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом N и размерностью дополняющего пространства равной s , мы будем использовать обозначение $R(N, s)$.

Далее приведем описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом N .

Теорема 1. Произвольная алгебра семейства $R(N, 1)$ изоморфна одной из следующих семейств алгебр:

$$R_1 : \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m_1 - 1, \quad [f_i, e_1] = f_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m_2 - 1, \\ [e_i, x] = ie_i + \sum_{j=i+1}^{m_2} \alpha_{2,j-i+1} f_j, & 1 \leq i \leq m_2, \\ [e_i, x] = ie_i, & m_2 + 1 \leq i \leq m_1, \\ [f_1, x] = \sum_{i=m_1-m_2+1}^{m_1} \beta_{1,i} e_i + \beta_{2,1} f_1, \\ [f_i, x] = \sum_{j=m_1-m_2+i}^{m_1} \beta_{1,j-i+1} e_j + (i-1 + \beta_{2,1}) f_i, \quad 2 \leq i \leq m_2, \\ [x, e_1] = -e_1, \quad [x, x] = -\sum_{i=1}^{m_2-1} \alpha_{2,i+1} f_i, & \text{если } \beta_{2,1} \neq 1 - m_2, \\ [x, x] = -\sum_{i=1}^{m_2-1} \alpha_{2,i+1} f_i + \delta_{2,m_2} f_{m_2}, & \text{если } \beta_{2,1} = 1 - m_2. \end{array} \right.$$

$$R_2 : \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m_1 - 1, \quad [f_i, e_1] = f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m_2 - 1, \\ [e_i, x] = \sum_{j=i+1}^{m_1} \alpha_{1,j-i+1} e_j + \sum_{j=i}^{m_2} \alpha_{2,j-i+1} f_j, & 1 \leq i \leq m_2, \\ [e_i, x] = \sum_{j=i+1}^{m_1} \alpha_{1,j-i+1} e_j, & m_2 + 1 \leq i \leq m_1, \\ [f_i, x] = \sum_{j=m_1-m_2+i}^{m_1} \beta_{1,j-i+1} e_j + f_i + \sum_{j=i+1}^{m_2} \beta_{2,j-i+1} f_j, \quad 1 \leq i \leq m_2, \\ [x, x] = \delta_{1,m_1} e_{m_1}. \end{array} \right.$$

Теорема 2. Произвольная алгебра семейства $R(N, 2)$ изоморфна следующей алгебре:

$$\left\{ \begin{array}{lll} [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m_1 - 1, \quad [f_i, e_1] = f_{i+1}, & 1 \leq i \leq m_2 - 1, \\ [e_i, x_1] = ie_i, \quad 1 \leq i \leq m_1, \quad [f_i, x_1] = (i-1)f_i, \quad 2 \leq i \leq m_2, \\ [f_i, x_2] = f_i, \quad 1 \leq i \leq m_2, \quad [x_1, e_1] = -e_1. \end{array} \right.$$

Литература

- [1]. Loday J.-L. Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. Enseign. Math., vol. 39, 1993, 269–293.
- [2]. J.M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, I.A. Karimjanov *Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical*. Lin. Multilin. Algebra, vol. 61(6), 2013, p. 758–774.

Задача лев и человек в присутствии препятства

Маматов М.Ш.¹, Зуннунов А.О.², Эсонов Э.Э.³^{1,2} *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*³ *Ташкентский Государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан*

e-mail: mamatovmsh@mail.ru, zizu.zunnunov@gmail.com, eganberdi-esonov@mail.ru

В данной заметке рассматривается задача Лев и Человек, т.е. задача преследования-убегания одного управляемого объекта x_0 - человек другим управляемым объектом x_1 - лев в компактном множестве $K \subset R^2$ (1). Пусть движение точек x_0, x_1 описывается уравнениями

$$\dot{x}_0 = u_0, \quad \dot{x}_1 = u_1, \quad \|u_0\| \leq 1, \quad \|u_1\| \leq 1, \quad (1)$$

u_0 - управляющий параметр убегającego, u_1 - управляющий параметр преследующего игрока.

Игра (1) считается завершенной, если, для некоторого заранее заданного $l > 0$ выполнено условие $\|x_0(T) - x_1(T)\| \leq l$ в момент времени T .

Теорема 1. Предположим, что на круге $K_{kr} = \{(x^1, x^2) : (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq r^2, r > 0\}$, рассматривается задача преследования - убегания (1). Тогда игра завершается за время

$$T_{kr}(l) = \left(\left[\frac{4(r-l)}{l} \right] + 1 \right) \frac{l}{4} + 2 \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{r^2 - \left(\frac{il}{4} \right)^2} + r \right),$$

где $n = \left[\frac{4(r-l)}{l} \right] + 1$, $[m]$ - целая часть числа m .

Теорема 2. Предположим, что на плоскости R^2 в квадрате $K_{kv} = \{(x^1, x^2) : 0 \leq x^1 \leq r, 0 \leq x^2 \leq r, r > 0\}$, рассматривается задача преследования - убегания (1). Тогда игра завершается за время

$$T_{kv}(l) = \left(\left[\frac{4(2r-l)}{l} \right] + 1 \right) \frac{l}{4} + \left[\frac{4(2r-l)}{l} \right] 2r + 4r.$$

Пусть $a_1 = \sqrt{2}r$ сторона вписанного, а $a_2 = 2r$ сторона описанного квадрата круга K_{kr} .

Теорема 3. Предположим, что на плоскости R^2 на круге K_{kr} , рассматривается задача преследования - убегания (1). Тогда для $T(l)$ имеет место оценки

$$\frac{\left(\left[\frac{4(\sqrt{2}r-l)}{l} \right] + 1 \right) \frac{l}{4} + \left[\frac{4(\sqrt{2}r-l)}{l} \right] \sqrt{2}r + 2\sqrt{2}r}{2} < T_{kr}(l) < \frac{\left(\left[\frac{4(2r-l)}{l} \right] + 1 \right) \frac{l}{4} + \left[\frac{4(2r-l)}{l} \right] 2r + 4r}{2}.$$

Теорема 4. Предположим, что на плоскости R^2 в выпуклого компактного множества K рассматривается задача преследования - убегания (1). Тогда игра завершается за время

$$T(l) = \left(\left[\frac{4(2d-l)}{l} \right] + 1 \right) \frac{l}{4} + \left[\frac{4(2d-l)}{l} \right] 2d + 4d,$$

где d диаметр множеств K .

Определения 1. Пусть K компактное подмножество R^2 и $\zeta \in R^2$ - прямой тогда, $\Omega = K \cap \zeta$ называется сечением множества K .

Определения 2. Компактное множество K называется выпуклым по направлению вектора $e \in \Omega$ относительно сечения Ω , если для любых двух точек $x, y \in K$ из прямой η параллельной e , проходящей через любой точки множества Ω и любого $\lambda \in [0, 1]$ точка $\lambda x + (1 - \lambda)y$ также принадлежит множеству K .

Теорема 5. Предположим, что на плоскости R^2 в компактном множестве K выпуклым по направлению вектора $e \in \Omega$ относительно сечения Ω , рассматривается задача преследования - убегания (1). Тогда игра завершается за время $T(l)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Littlewood J.E. A mathematician's miscellany/London: Methuen, 1953.

Об интегрировании одного нагруженного уравнения кортевега-де фриза в классе периодических функций

Матякубов М.М., Жуманиёзова Г.Х., Хасанов Т.Г.

Ургенчский государственный университет, Узбекистан, г.Ургенч

e-mail: mm2210410@mail.ru

В работе [1] исследовано уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) с нагруженным членом в классе периодических функций. В данной работе изучается следующее нагруженное уравнение

$$q_t = q|_{x=0} \cdot (q_{xxx} - 6qq_x), \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (44)$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad (45)$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$ заданная действительная π -периодическая функция. Требуется найти действительную функцию $q(x, t)$, которая π -периодическая по переменной x :

$$q(x + \pi, t) \equiv q(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (46)$$

и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (47)$$

Теорема. Пусть $q(x, t)$ решение задачи (1)-(4). Тогда границы спектра $\lambda_n, n \geq 0$, следующего оператора

$$L(\tau, t)y \equiv -y'' + q(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R$$

не зависят от параметров τ и t , а спектральные параметры $\xi_n(\tau, t), n \geq 1$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) q(0, t) [2q(\tau, t) + 4\xi_n] h_n(\xi), \quad n \geq 1,$$

где знак $\sigma_n(\tau, t) \equiv \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки с границами своей лакуны $\xi_n(\tau, t)$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \geq 1,$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \geq 1$ - спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x + \tau)$.

Следствие 1. Эта теорема вместе с формулой первого следа

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t))$$

дает метод решения задачи (1)-(4).

Следствие 2. Используя результаты работы [2] выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то решение $q(x, t)$ также является действительной аналитической функцией по x .

Следствие 3. В силу теоремы работы [3], если число π/n является периодом начальной функции $q_0(x)$, то это число π/n является периодом и для решения $q(x, t)$ по переменной x . Здесь $n \geq 2$ натуральное число.

References

- [1]. Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций // Известия вузов. Математика. 2016 г., N 2, с. 87-92.
- [2]. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials. // Comm. Pure. Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.
- [3]. Hochstadt H. A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations. // Journal of math. analysis and applications, 1984, 102, p. 599-605.

О численном решении обратных задач для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа: одномерный случай

Меражова Ш.Б., Азимова Д.О., Хасанова Х.Х.

Бухарский государственный университет

e-mail: shsaripova@mail.ru

В данной работе дается метод для численного решение обратной задачи поставленной для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в одномерном случае. Рассмотрим уравнение смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t)g(t), & \text{если } t > 0 \\ u_{tt} - u_{xx} = f(t)g(t), & \text{если } t < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, t); 0 < x < l, -t_1 < t < t_2\}$, t_1 и t_2 - заданные положительные числа. Для этого уравнения можно поставить следующую задачу:

Постановка обратной задачи: Найти в области D функции $u(x, t)$ и $f(x)$ удовлетворяющие условиям:

$$u(x, t) \in C(\overline{D}) \cap C'(D) \cap C_{x,t}^{2,1}(D_+ \cup \{t = t_1\}) \cap (c^2 D_- \cup \{t = -t_2\}) \quad (2)$$

$$f(x) \in C(0, l) \quad (3)$$

$$Lu = f(t)g(t), (x, t) \in D_+ \cup D_- \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(l, t), -t_2 \leq t \leq t_1, \quad (5)$$

$$u(x, -t_2) = \psi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

$$u(x, t_1) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

Где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$. $D_+ = D \cap t > 0$, $D_- = D \cap t < 0$.

Решение этой задачи ищем в виде бесконечного ряда:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{\pi k}{l} x,$$

где $\sin \frac{\pi k}{l} x$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля для заданной задачи. Подобным образом разложим функции $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \pi k x,$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \pi k x,$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin \pi k x,$$

Подставляя, эти значения в заданную задачу и используя условия склейки, составим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье. Решая систему можно найти решения обратной задачи. Для численного решения этой задачи составим сопряженную задачу и далее используем метод разностных схем. К настоящему времени наиболее полные результаты получены по исследованию прямых задач для уравнений смешанного типа, но работа связанные с поиском решения обратных задач для уравнения смешанного типа практически мало.

Литература

1.1. Дурдиев Д.К., Меражова Ш.Б. О решении обратных задач для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа: одномерный случай. Vuxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, 2/2015.

Геодезические отображения на Риччи плоские пространства

Микеш Й., Гинтерлейтнер И., Гусева Н.И.

Университет им. Палацкого, Оломоуц, Технический университет Брно, Чехия,
Московский педагогический государственный университет, Россия
e-mail: josef.mikes@upol.cz, hinterleitner.i@fce.vutbr.cz, ngus12@mail.ru

Изложим некоторые результаты, посвященные геодезическим отображениям n -мерных (псевдо-) римановых пространств V_n на Риччи плоские пространства «в целом». Риччи плоские пространства характеризуются нулевым тензором Риччи и являются специальными пространствами Эйнштейна. Общие вопросы геодезических отображений (псевдо-) римановых пространств изложены, например, в [1,2].

Геодезические отображения пространств Эйнштейна начал изучать А.З. Петров, см. [1]. В 1978г. Й. Микеш доказал замкнутость пространств Эйнштейна относительно нетривиальных геодезических отображений. В 1982г. для $n = 4$ доказано, что нетривиально геодезически соответствующие пространства Эйнштейна имеют постоянную кривизну. Сформулированные результаты имеют глобальное значение. Это элементарно вытекает (ДеТурк, Каждан) из существования в пространстве Эйнштейна аналитической системы координат. Метрики всех пространств Эйнштейна, допускающих геодезические отображения, найдены в работе Формеллы и Микеша. Выше упомянутые результаты сообщаются в [2].

Начиная с работ Коути и Акбар-Задэ эти задачи изучались «в целом».

Предполагаем, что рассматриваемое (псевдо-) риманово пространство $V_n \in C^1$ с метрикой g связное и оно либо без границы либо его граница ∂V_n (почти) Липшищевская. Пусть пространство V_n допускает геодезическое отображение f на Риччи плоское (псевдо-) риманово пространство $\bar{V}_n$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если через точку $x_0 \in V_n$, в которой скалярная кривизна R равна нулю, проходит в n линейно независимых направлениях полные геодезические линии γ , то это отображение является аффинным.

Теорема 2. Если скалярная кривизна R пространства V_n не нулевая, то на V_n не существуют полные геодезические линии, для которых $R \cdot g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) > 0$, а также не существуют геодезические линии γ , для которых $R \cdot g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$ и $f(\gamma)$ является полной.

Теорема 3. Если через точку $x_0 \in V_n$, в которой не все секционные кривизны равны между собой, проходит в n линейно независимых направлениях полные изотропные геодезические линии γ , для которых $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$, то это отображение является аффинным.

References

- [1] Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, Наука, М. 1965.
- [2] Mikeš J. et al. Differential geometry of special mappings, Palacky Univ., Olomouc 2019.

Теоремы стабильности для слоений

Нарманов А., Каипназарова Г, Дияров Б.

Национальный Университет Узбекистана

Пусть M - гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g , $V(M)$ - множество гладких векторных полей, определенных на M . Гладкость будет означать гладкость класса C^∞ , как отмечено во введении.

Определение-1. Слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F , остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках.

Регулярные римановы слоения введены Рейнхартом в [?] и изучались многими авторами, в частности в работах [?],[?].

Пусть ω - замкнутая дифференциальная форма степени 1 на компактном многообразии M . Известно, что существует такая риманова метрика g на M , что слоение F , порожденное ω , является римановым по отношению к римановой метрике g . Например, для одномерного слоения F на двумерном торе T^2 , определенного замкнутой формой $\omega = \omega_1 d\varphi_1 + \omega_2 d\varphi_2$, существует риманова метрика $\tilde{g}$ на T^2 , по отношению к которой слоение F является римановым.

Следующая теорема о стабильности компактного слоя доказана Ж.Рибом в 1944 году [?].

Теорема-1. Пусть L - компактный слой слоения F . Если группа голономии слоя L конечна, то для каждого открытого множества V , содержащего L , существует открытое инвариантное множество V_0 такое, что $L \subset V_0 \subset V$, каждый слой из V_0 — компакт и имеет конечную группу голономии.

В 1976 году на международной конференции в Рио-де-Жанейро Гектором был поставлен вопрос о возможности обобщения теоремы Рибана на некомпактные слои [?].

В 1977 году японский математик Т.Инаба построил пример, который показывает, что когда коразмерность слоения больше единицы, то теорема Ж.Рибана нельзя обобщить для некомпактных собственных слоев [?]. Таким образом, вопрос Гектора об обобщении теоремы Рибана на некомпактные слои нужно рассмотреть только для слоений коразмерности один.

Следующая теорема является обобщением теоремы для римановых слоений.

Теорема-2. Пусть F является римановым слоением коразмерности один на полном римановом многообразии (M, g) , L -компактный слой. Тогда для каждого открытого множества V , содержащего L , существует открытая инвариантная окрестность U слоя F такая, что $L \subset U \subset V$, и U состоит из компактных слоев, диффеоморфных L .

References

- [1]. Blumenthal R., Hebda J. Ehresman connections for foliations. Indiana University. Math.J., 1984, vol. 33, 4, p. 597-611.
- [2]. Inaba T. On the stability of proper leaves of codimension one foliations, J.Math. Soc., Japan, 1977, v.29, 4, p. 771-778.
- [3]. Reinhart B. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Math., 1959, vol. 69, 1, p.119-132.

[4]. Schweitzer P.A. Some problems in foliation theory and related areas. Lecture Notes in Mathematics. 1978, 652, p. 245 (problem - 14).

[5]. Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds. Springer. Verlag, 1988.

Инвариантные решения двумерного уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович

НИЦ ИКТ при ТУИТ, Узбекистан г. Ташкент

e-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Пусть нам дано дифференциальное уравнение порядка

$$\Delta(x, u^{(m)}) = 0 \quad (48)$$

от n независимых $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ и q зависимых переменных $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$, содержащее производные от u по x до порядка m .

Определение. Группа G преобразований, действующая на множестве M пространства независимых и зависимых переменных дифференциального уравнения называется группой симметрий уравнения (0.1), если для каждого решения $u = f(x)$ уравнения (0.1) и для $g \in G$ такого, что определено $g \circ f$, то функция $\tilde{u} = g \circ f$, также является решением уравнения.

Для уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ группа сдвигов

$$(x, t, u) \rightarrow (x + as, t + bs, u), s \in R \quad (49)$$

является группой симметрий, поскольку если функция $u = f(x)$ является решением, то функция $u = f(x - as, t - bs)$ также является решением уравнения теплопроводности.

Одним из преимуществ знания группы симметрий дифференциальных уравнений состоит в том, что если нам известно решение $u = f(x)$, то в соответствии с определением $\tilde{u} = g \circ f$ тоже решение для любого элемента g группы G , так что у нас есть возможность построить целое семейство решений, подвергая известное решение действию всевозможных элементов группы.

Методы группового анализа широко используются для исследования уравнений в частных производных и для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1],[2],[3] рассматриваются вопросы интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений в частных производных, на основе известных инфинитезимальных симметрий.

Нахождению групп симметрий дифференциальных уравнений и их применениям для исследований посвящены многочисленные исследования [1],[2],[3]. В работе [2] разработан вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольного дифференциального уравнения в частных производных. В работе [3] рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. Даются примеры применения техники группового анализа к конкретным системам дифференциальных уравнений. В работе [1] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного

и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [5].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (k_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u) \quad (50)$$

где $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$ — температурная функция, $k_i(u) \geq 0$, $Q(u)$ — функции от температуры u . Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u) > 0$ и процесс теплопоглощения, если $Q(u) < 0$. Исследования показывают, коэффициенты теплопроводности $k_1(u), k_2(u)$ в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры, т. е. имеет вид $k(u) = u^\sigma$.

Рассмотрим случай $k_1(u) = k_2(u) = u$, $Q(u) = u$. В этом случае уравнение (1) имеет следующий вид:

$$u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2 + u \quad (51)$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа, $\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ — градиент функции u .

Как показано в работе [1] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (1.2):

$$X_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \exp(-t) \frac{\partial}{\partial t} + \exp(-t) u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (52)$$

Это означает, что потоки этих векторных полей порождают группу преобразований пространства переменных (t, x_1, x_2, u) , которые переводят решения уравнения (4) в решения.

Теорема Инвариантными решениями уравнения (4), относительно группы преобразований, порожденных векторными полями (5) являются функции

$$u(t, x_1, x_2) = C_2 \frac{e^t}{2} [C_1 x_1^4 + x_1^3 x_2 - 6C_1 x_1^2 x_2^2 - x_1 x_2^3 + C_1 x_2^4]^{1/2}, \quad (53)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dorodnitsyn V.A., Knyazeva I.V., Svirshchevskii S. R. Group properties of the heat equation with source in the two-dimensional and three-dimensional cases, Differential equations, 1983, vol. 19, issue 7, 1215-1223.
2. Olver.P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer 1986, P. 513 p. Translated under the title *Prilojeyniya grupp Li k differentsialnim uravneniyam*, Moscow: Mir, 1989, 639 p.
3. Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations, Academic Press, 1982, 432 p. DOI: 10.1016/C2013-0-07470-1 Original Russian text published in Ovsyannikov L.V. Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii, Moscow: Nauka, 1978, 399 p.
4. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdumov S.P., Mikhaylov A.P. Rezhimy s obostreniyem v zadachax dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy. M.: "Nauka 1987, 481 pages (in Russian)

5. Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics 2018,6,373-381.DOI: 10.4236/jamp.2018.62035

Ψ-плюрисубгармоническая мера

Нарзиллаев Нурбек Хамрокулович

Национальный Университет Узбекистана

e-mail: n.narzillaev@nuu.uz

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ строго псевдовыпуклая т.е. $D = \{\rho(z) < 0\}$, где $\rho(z)$ дважды гладкая, строго плюрисубгармоническая функция в некоторой окрестности замыкания $\overline{D}$ [1]. $K \Subset D$ компактное множество и $\psi(z)$ некоторая непрерывная, строго отрицательная функция на D .

Определение. Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{U}(K, D, \psi) = \left\{ u(z) \in psh(D) : u(z)|_K \leq \psi, u(z)|_D < 0 \right\}$$

и положим $\omega(z, K, D, \psi) = \sup\{u(z) : u(z) \in \mathcal{U}(K, D, \psi)\}$. Тогда регуляризация $\omega^*(z, K, D, \psi)$ называется **ψ-плюрисубгармонической мерой** компакта K относительно области D .

Определение. [2] Точка $z^0 \in K$ называется глобально ψ -регулярной точкой компакта K , если $\omega^*(z^0, K, D, \psi) = \psi(z^0)$. Компакт K называется локально ψ -регулярным (или просто ψ -регулярным) в точке $z^0 \in K$, если для любого $r > 0$ функция $\omega^*(z^0, K \cap \overline{B(z^0, r)}, D, \psi) = \psi(z^0)$. Компакт K называется ψ -регулярным компактом, если он ψ -регулярен в любой своей точке.

ψ -плюрисубгармоническая мера либо нигде равна нулю, либо тождественно равна нулю. $\omega^*(z, K, D, \psi) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда E плюриполярное в D .

Отметим, что $\omega^*(z, K, D, -1)$ совпадает с P -мерой теории плюрипотенциала, т.е. $\omega^*(z, K, D, -1) = \omega^*(z, K, D)$. Функция $\omega^*(z, K, D, \psi)$ удовлетворяет многим свойствам функции $\omega^*(z, K, D)$. Известно что, точка $z^0 \in K$ называется плюрирегулярной точкой компакта K , если $\omega^*(z^0, K, D) = -1$.

Заметим, что для любого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ имеет место неравенство

$$-\min_K \psi(z) \cdot \omega^*(z, K, D) \leq \omega^*(z, K, D, \psi) \leq -\max_K \psi(z) \cdot \omega^*(z, K, D) \quad (1)$$

Утверждение. Точка $z^0 \in K$ является локально ψ -регулярной тогда и только тогда, когда она является локально плюрирегулярной точкой компакта K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Садуллаев А. Теория плюрипотенциала. Применения, Германия, Palmarium Academic Publishing, 2012. 307 с.
2. Садуллаев А. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях, АН СССР, Успехи математические наук, 1981, 36:4 35-105.

**Условия существования собственных значений
молекулярно-резонансной модели с трехмерным возмущением**

Неъматова Ш.Б., Расулов Т.Х.

Бухарский государственный университет

Для каждого фиксированного $h > 0$ через $\mathbf{T}_h^d$ обозначим d -мерный куб $(-\pi; \pi]^d$ соответствующим отождествлением противоположных граней. Из строения множества $\mathbf{T}_h^d$ следует, что для любого $B \subset \mathbf{R}^d$ существует $h = h(B) > 0$ такое, что $B \subset \mathbf{T}_h^d$, т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} \mathbf{T}_h^d = \mathbf{R}^d$. Пусть $\mathcal{H}_0 := \mathbf{C}$ - одномерное комплексное пространство, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbf{T}_h^d)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на $\mathbf{T}_h^d$ и $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

Рассмотрим молекулярно-резонансную модель A_h , действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как операторная матрица

$$A_h := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}$$

с матричными элементами $A_{ij} := \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1$:

$$A_{00}f_0 = -\varepsilon f_0, \quad A_{01}f_1 = \mu_1 \int_{\mathbf{T}_h^d} v(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}f_1)(p) = (-\varepsilon + w(p))f_1(p) - \mu_2 \varphi(x) \int_{\mathbf{T}_h^d} \varphi(t)f_1(t)dt.$$

Здесь ε - положительное число, $\mu_1, \mu_2 > 0$ - параметры взаимодействия, $v(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ и $w(\cdot)$ вещественно-значные непрерывные функции на $\mathbf{T}_h^d$. Очевидно, что при этих предположениях оператор A_h ограничен и самосопряжён в $\mathcal{H}$.

Пусть $m_h := \min_{p \in \mathbf{T}_h^d} w(p)$. С целью исследования собственных значений оператора A_h предположим, что $m_h \geq 0$ и

$$\int_{\mathbf{T}_h^d} \frac{\varphi^2(t)dt}{w(t) - m_h} < \infty.$$

Пусть $\text{supp}\{v(\cdot)\}$ носитель функции $v(\cdot)$, а $\text{mes}(\Omega)$ - мера Лебега измеримого множества $\Omega \subset \mathbf{T}_h^d$ и

$$\mu_2^0(h) := \left(\int_{\mathbf{T}_h^d} \frac{\varphi^2(t)dt}{w(t) - m_h} \right)^{-1/2}.$$

Теорема. Пусть $\text{mes}(\text{supp}\{v(\cdot)\} \cap \text{supp}\{\varphi(\cdot)\}) = 0$.

- а) Если $\mu_2 > \mu_2^0(h)$, то для любого $\mu_1 > 0$ оператор A_h имеет два (с учетом кратности) собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon + m_h$;
- б) Если $0 < \mu_2 \leq \mu_2^0(h)$, то для любого $\mu_1 > 0$ оператор A_h имеет одно простое собственное значение, лежащее левее $-\varepsilon + m_h$.

Замечание. Если интеграл

$$\int_{\mathbf{T}_h^d} \frac{\varphi^2(t)dt}{w(t) - m_h}$$

расходится, то при всех $\mu_1, \mu_2 > 0$ оператор A_h имеет два собственных значения, лежащих левее $-\varepsilon + m_h$.

Принцип компактности для A -гармонических функций при случае $A \equiv \text{const}$

Номозова Х.М., Шодмонова Ф.З.
Национальный Университет Узбекистана

Работа посвящена аналитической теории решения хорошо известного уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z), \quad (55)$$

имеющее непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $|A(z)| \leq C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (55) принято говорить A -аналитическими функциями (см. [1,2]). В случае, когда $A(z)$ -антианалитическая в D т.е. $\bar{A} \in O(D)$.

Пусть A -антианалитическая, $\partial A = 0$, в области $D \subset \mathbb{C}$ и такая, что $|A(z)| \leq C < 1$, $\forall z \in D$. Положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда согласно (55) класс аналитических функций $f(z) \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f(z) = 0$. Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой и $O_A(D) \subset C^\infty(D)$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ -выпуклая область и $G \subset D$ -произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей ∂G .

Определение 1. Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset O_A(G)$, заданных в некоторой области G , называется равномерно ограниченным внутри G , если для любого компакте $K \subset \subset G$ существует постоянная $M = M(K)$ такая, что

$$|f_\alpha(z)| \leq M$$

для всех $z \in K$ и всех $f \in \{f_\alpha(z)\}$.

Теорема 1. Если Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset O_A(G)$, равномерно ограничено внутри G , то и семейство производных $\{f'_\alpha(z)\}$ также равномерно ограничено внутри G .

Определение 2. Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}$, заданных в некоторой области G , называется равномерно непрерывным внутри G , если для любого $\varepsilon > 0$ и любого множества $K \subset \subset G$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что

$$|f(z'') - f(z')| < \varepsilon$$

для $\forall z'', z' \in K$ таких, что $|z'' - z'| < \delta$, и $\forall f \in \{f_\alpha\}$.

Теорема 2. Если Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset O_A(G)$, равномерно ограничено внутри G , то она и равномерно непрерывно внутри G .

Определение 3. Семейство функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset O_A(G)$, называется нормальным, если любое его подсемейство $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda_0}$, $\Lambda_0 \subset \Lambda$, содержит равномерно сходящуюся внутри G подпоследовательность $\{f_j(z)\} \subset \{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda_0} : f_j(z) \Rightarrow f(z), j \rightarrow \infty$.

Теорема 3 (Монтель)[4]. Локально равномерно ограниченное семейство A -аналитических функций $\{f_\alpha(z)\}_{\alpha \in \Lambda} \subset O_A(G)$ образует нормальное семейство.

Л и т е р а т у р а

1. **Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х.** Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, *Монография*, 2012, 212 с.
2. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** Теорема Коши для $A(z)$ -аналитических функций, *Узбекский математический журнал*, 2014, №1, стр. 15-18.
3. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.** Аналог интегральной формулы Коши для A -аналитических функций, *Узбекский математический журнал*, 2016, №4, стр. 50-59.
4. **Sadullaev A., Jabborov N.M.** On a class of A -analytic functions, *Siberian Federal University, Maths&Physics*, 2016 y 9(57), с. 374-383.
5. **Zhabborov N.M.** Morer's theorem and functional series in the class of A -analytic functions, *Siberian Federal University, Maths&Physics*, v. 11(55)2018, 50-59
6. **Жабборов Н.М., Отабоев Т.У., Ш.Я. Хурсанов,** Неравенство Шварца и формула Шварца для $A(z)$ -аналитических функций, *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2018, том 64, №4 с.637-649.
7. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного, М. Физматгиз, 1958г.

Максимальные инъективные вещественные Свойства инъективности и ядерности для вещественных W^* -подалгебры тензорных произведений вещественных W^* -алгебр

Н. Э. Музаффар, М. В. Долгополов

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами

443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1.

e-mail: nurillaev_muzaffar@mail.ru

Пусть $B(H)$ – алгебра всех ограниченных операторов действующих в комплексном гильбертовом пространстве H и пусть $R \subset B(H)$ – вещественная W^* -алгебра. Напомним, что вещественная W^* -алгебра R называется инъективной, если существует $P: B(H) \rightarrow R$ – проекция такая, что $\|P\| = 1$ и $P(1) = 1$ [?].

Пусть P, R – вещественные W^* -алгебры. Вещественная W^* -подалгебра $Q \subset R$ называется максимальной инъективной в R , если она инъективна и максимальна, т. е. не существует другой инъективной вещественной W^* -подалгебры R , содержащей Q .

Ясно, что если Q – максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра R , тогда Q' является минимальной инъективной вещественной W^* -алгеброй, содержащей алгебру R' , где Q', R' – коммутанты алгебры Q и R , соответственно. Поэтому для любой такой алгебры всегда существует как максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра, так и минимальное инъективное W^* -расширение.

Лемма 1. Пусть R – минимальное инъективное вещественное W^* -расширение вещественной W^* -алгебры Q и пусть p, q – ненулевые центральные проекторы в R . Если существует $*$ -изоморфизм $\varphi: R_p \rightarrow R_q$ с $\varphi(px) = qx, \forall x \in Q$, тогда $p = q$ и $\varphi(py) = py, \forall y \in R$.

Напомним, что вещественная W^* -алгебра называется *атомической*, если каждый ненулевой проектор алгебры мажорирует ненулевой минимальный проектор (атом), т.е. под каждым ненулевым проектором имеется атом.

Основным результатом работ является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть R – вещественная W^* -алгебра и Q – максимальная инъективная вещественная W^* -подалгебра R_i ($i = 1, 2$). Если R_1 – сепарабельна и центр Q_1 – атомический, тогда $Q_1 \bar{\otimes} Q_2$ является максимальным инъективным в $R_1 \bar{\otimes} R_2$.

References

[1]. Rakhimov A.A., Nurillaev M.E. On property of injectivity for real W^* -algebras and JW-algebras // Positivity. 2018, 22, pp. 1345-1354.

О геометрии Гамильтоновых симметрий

Пармонов Х.Ф., Киличов О.Ш.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в гамильтоновой форме

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x, t) \quad (1)$$

где $H(x, t)$ – гамильтониан, а $J(x)$ – структурная матрица, задающая скобку Пуассона.

На плоскости гамильтоновым векторным полем, соответствующим функции $H(x, t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ имеет вид $\nu_H = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$. Соответствующая гамильтонова система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad (2)$$

Определение. Функция $P(x, t)$ называется первым интегралом системы (1), если для решения $x(t)$ имеет место $P(x(t), t) = \text{const}$ для всех t .

Для системы (2) функция $H(x, t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ является первым интегралом. Первые интегралы легко описываются с помощью скобки Пуассона. Известна следующая теорема [1, стр.494] о первых интегралах системы

Теорема 1. Функция $P(x, t)$ является первым интегралом гамильтоновой системы (1), если и только если

$$\frac{\partial}{\partial t} + \{P, H\} = 0 \quad (3)$$

для всех x, t . В частности, не зависящая от времени функция $P(x)$ является первым интегралом в том и только в том случае, если всюду $\{P, H\} = 0$.

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Теорема 2. Пусть система (1) не зависит от t , V_p — гамильтонова симметрия, где функция P не зависит от t . Тогда для каждого решения $X(t)$ системы (1) имеет место $P(x(t)) = at + b$ для всех t , где a, b — постоянны.

Доказательство. Если функция P является первым интегралом, то очевидно, что тогда для каждого решения $X(t)$ системы (1) имеет место $P(x(t)) = b = \text{const}$ для всех t . С другой стороны, V_p — векторное поле является гамильтоновой симметрией, только тогда, когда $\frac{\partial}{\partial t} + \{P, H\} = C(t)$ является отмеченной функцией. Так как функция P не зависит от t , мы имеем $\{P, H\} = C(t) = a$ является постоянной функцией. Положим $G = \int_0^t \{P, H\} dt = at + b$. Вдоль решения системы (1) имеет место $\frac{\partial G}{\partial t} = \{G, H\} = a$. Теперь можем проверить, что функция $P_0 = P - G$ является первым интегралом: $\frac{\partial P_0}{\partial t} = \{P_0, H\} = a$. Таким образом, для каждого решения $X(t)$ системы (1) имеет место $P(x(t)) = at + b = \text{const}$ для всех t .

ЛИТЕРАТУРА.

1. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1989, 644 стр. 2. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М-Л, Главная редакция технико-теоретической литературы. 1937, 644 стр. 3. А.М. Переломов. Интегрируемые системы классической механики и алгебры М.: Наука, 1990, 237 стр.

Множественная поимка в рекуррентных дифференциальных играх

Петров Н.Н., Соловьева Н.А.

Удмуртский университет, Россия, Ижевск

e-mail: kma3@list.ru, solov_na@mail.ru

В пространстве $R^k(k \geq 2)$ рассматривается дифференциальная игра $\Gamma(n, m)$ $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$, описываемая системой вида

$$\dot{z}_{ij} = A(t)z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V, \quad z_{ij}(t_0) = z_{ij}^0,$$

где $z_{ij}, u_i, v_j \in R^k$, V — строго выпуклый компакт R^k , $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функция порядка k . Здесь и далее $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$. Считаем, что $z_{ij}^0 \notin M_{ij}$, где M_{ij} — заданные выпуклые компакты.

Введем следующие обозначения. $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\omega}(t) = A(t)\omega(t)$, $\omega(t_0) = E$, $\text{Int}X$, $\text{co}X$ — соответственно внутренность, выпуклая оболочка множества X ,

$$\lambda(h_{ij}, v) = \sup\{\lambda_0 : -\lambda(h_{ij} - M_{ij}) \cap (V - v) \neq \emptyset\},$$

$\Omega_K(l) = \{(i_1, \dots, i_l) : i_p \in K, p = 1, \dots, l\}$, при этом $i_1, \dots, i_l$ попарно различны, где K — конечное подмножество множества натуральных чисел. Предполагается, что убегающие используют программные стратегии, каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Цель преследователей — поймать

заданное число (q) убегающих, причем каждого убегающего необходимо поймать не менее, чем заданным числом (r) преследователей. Получены достаточные условия многократной поимки заданного числа убегающих.

Предположение 1. Фундаментальная матрица Φ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на $[t_0, \infty)$.

Предположение 2. Для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что $\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha\beta}^0, v) > 0$ для всех $\beta \in M$.

Теорема 1. Пусть выполнено предположение 1 и $\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha 1}^0, v) > 0$.

Тогда в игре $\Gamma(n, 1)$ происходит r -кратная поимка.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 2. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 3. Пусть $A(t) = 0$ для всех tt_0 и выполнено предположение 2. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 4. Пусть выполнено предположение 1, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $s \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, что $0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \text{Intco}\{z_{\alpha\beta}^0 - M_{\alpha\beta}, \alpha \in \Lambda\}$ для всех $\beta \in M$. Тогда в игре $\Gamma(n, m)$ происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-51-415005).

Литература

1. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С.Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика, 61:5 (1997), 725-732.
2. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 23:1 (2017), 212-218.
3. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения, 23:4 (1987), 724-726.
4. Зубов В.И. К теории рекуррентных функций // Сибирский математический журнал, III:4 (1962), 532-560.

Метод дискретизации области сложной конфигурации

Полатов А.М., Икрамов А.М., Пулатов С.И.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан
e-mail: asad3@yandex.com

В статье разработан метод построения конечно-элементной сетки области сложной конфигурации. Доказательство корректности метода основывается на следующих рассуждениях.

Определение 1. Топология модели сложной области представляется трехмерной областью, которая является системой соединенных между собой объемных

элементов, ограниченных поверхностями, пересекающимися в узловых точках; граничные поверхности и линии, как и каждый объемный элемент, могут иметь некоторое число внутренних узлов; поверхности могут пересекаться только вдоль граничных линий.

Определение 2. Конечно-элементное представление конфигурации области описывается дискретным множеством $\Omega = \{n, m, K, M\}$, где n – число узлов конечно-элементной сетки; m – количество конечных элементов; K – множество координат узлов; M – множество номеров узлов по конечным элементам.

Критерий. Условием совпадения граничных узлов двух множеств Ω_1 и Ω_2 является соотношение

$$|x_i - x_j| < \varepsilon \quad \& \quad |y_i - y_j| < \varepsilon \quad \& \quad |z_i - z_j| < \varepsilon,$$

где

- $(x_i, y_i, z_i), (i = 1, 2, \dots, n_1) \in K_1$ – множество координат узлов Ω_1 ;
- $(x_j, y_j, z_j), (j = 1, 2, \dots, n_2) \in K_2$ – множество координат узлов Ω_2 ;
- $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число.

Теорема. Если при объединении множеств $\Omega_1 = \{n_1, m_1, K_1, M_1\}$ и $\Omega_2 = \{n_2, m_2, K_2, M_2\}$ выполняются условия топологии модели сложной области, то

$$m = m_1 + m_2, \quad n = n_1 + n_2 - q,$$

$$M = M_1 \cup M'_2, \quad K = K_1 \cup K'_2,$$

где

- n – общее число узлов;
- m – общее число конечных элементов;
- $q = \|K_1 \cap K_2\|$ – число узлов, расположенных на границе объединения подобластей;
- K_1 и K_2 – множества координат узлов;
- K'_2 – множество координат узлов множества Ω_2 , без учета совпадающих граничных узлов множества K_1 ;
- M'_2 – множество перенумерованных узлов множества Ω_2 .

На основе этого метода разработаны вычислительные алгоритмы:

- формирования конечно-элементной сетки элементарных подобластей;
- "сшивания" подобластей;
- определения начального фронта;
- упорядочения номеров узлов.

Литература

Метод построения конечно-элементного представления многосвязной области
 // Математическое моделирование. Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН. Том 30, №2, 2018. -С. 119-129.

О геометрии сингулярных слоений

Qosimov O.Yu.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: o_kasimov84@inbox.ru

В этой работе изучается геометрию сингулярного слоения, порожденного орбитами гладких векторных полей.

Пусть M — гладкое риманово многообразие размерности n с метрическим тензором g , D — семейство гладких векторных полей заданных на многообразии M . Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Definition 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x из M , определяется как множество таких точек y из M , для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_k$ из D (где k произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)) \quad (54)$$

Ясно, что орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием), если D состоит из одного векторного поля.

В этой работе изучается геометрию сингулярного слоения, порожденного орбитами гладких векторных полей.

Definition 2 Разбиение F многообразия M на слой называется гладким (C^r -класса) сингулярным слоением (слоением с особенностями), если выполнены следующие условия:

I) для каждой точке $x \in M$ существует C^r -карта (ψ, U) , содержащая точку x такая, что $\psi(U) = V_1 \times V_2$, где V_1 -окрестность начала в R^k , V_2 -окрестность начала в R^{n-k} , k -размерность слоя, проходящего через точку x ;

II) $\psi(x) = (0; 0)$;

III) для каждого слоя L такого $L \cap U \neq \emptyset$, имеет место $L \cap U = \psi^{-1}(V_1 \times l)$, где $l = \{\nu \in V_2 : \psi^{-1}(0, \nu) \in L\}$.

Пусть $D = \{X, Y\}$ семейство гладких векторных полей в R^3 , где

$$X = \{-y; x; 0\}, Y = \{0; z; y\}.$$

Theorem 1. Орбиты семейства векторных полей D порождают сингулярное слоение, сингулярным слоем которого является точка, а регулярные слои которого конус с удаленной вершиной в начале координат, однополостный и двуполостный гиперболоиды.

References

- [1]. Tamura I. Topology of foliation: an introduction// Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., 2006.
- [2]. Molino P. Orbit-like foliations// Geometric Study of Foliations, -Tokyo 1993. P. 97-119, World Scientific, 1994.
- [3]. Нарманов А.Я., Касимов О. Геометрия сингулярных римановых слоений// Узбекский математический журнал.-Ташкент, 2011. -N 3. -с. 129-135.

О неравенствах для моментов ветвящихся случайных процессов с иммиграцией

Кудратов Х.Э., Тошкулов Х.А.

Пусть $\{\xi_{k,i}, k, i \geq 1\}$ и $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ — две независимые совокупности независимых, неотрицательных, принимающих целые значения и одинаково распределенных случайных величин. Рассмотрим ветвящийся процесс с иммиграцией (см, например, [1]) $X_k, k \geq 0$ определенную следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_0 = \eta, \quad X_n = \sum_{j=1}^{X_{n-1}} \xi_{n,j} + \varepsilon_n$$

где η — некоторая неотрицательная, принимающая целые значения случайная величина, независимая от семейства случайных величин $\{\xi_{k,i}, \varepsilon_k, k, i \geq 1\}$.

Обозначим через $\mathcal{F}_k$ — σ — алгебру, порожденную случайными величинами $X_0, X_1, \dots, X_k$. В дальнейшем знак $E(\xi|\mathcal{F}_n)$ будет обозначать условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно алгебры $\mathcal{F}_n$.

Введем следующие обозначения:

$$m = E\xi_{1,1}, \quad \theta_p = E|\xi_{1,1} - m|^p$$

$$\lambda = E\varepsilon_1, \quad \delta_p = E|\varepsilon_1 - \lambda|^p$$

$$\nu = E\eta$$

Нами получены следующие оценки для моментов отклонения от условного среднего.

Теорема. Пусть $m < \infty, \lambda < \infty, \nu < \infty$. Тогда для любого $0 < p \leq 1$ имеет место неравенство

1. если $m \neq 1$, то

$$E|X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|^p \leq \theta_p(m^{n-1}\nu + \frac{m^{n-1} - 1}{m - 1}\lambda) + \delta_p$$

2. если $m = 1$, то

$$E|X_n - E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|^p \leq \theta_p(\nu + n\lambda) + \delta_p$$

Литература

1. Athreya K.B., Ney P.E. Branching processes, Springer - Verlag, Berlin. 1972.287p.

О гомеоморфности подпространств пространства вероятностных мер в компактных пространствах.

А.Х.Рахматуллаев, (ТИИИМСХ), Б.Г. Назаров, (ГулДУ).

e-mail:Olimboy56@gmail.com

В данной заметке для функтора $P_f[1]$ в категории компактов и непрерывных отображений в себя, доказывается следующая

Теорема Для компактов X и Y пространства $P_f(X)$ и $P_f(Y)$ гомеоморфны соответственно вне множеств $\delta(X)$ и $\delta(Y)$ тогда и только тогда, когда $\delta(X)$ и $\delta(Y)$ гомеоморфны где $\delta(X)$ и $\delta(Y)$ пространства всех мер Дирака соответственно компактных X и Y .

Доказательство. Пусть X и Y такие компакты, что $P_f(X) \setminus \delta(X)$ гомеоморфны $P_f(Y) \setminus \delta(Y)$. т.е. $P_f(X) \setminus \delta(X) \cong P_f(Y) \setminus \delta(Y)$. Через h обозначим этот гомеоморфизм. т.е. $h : P_f(X) \setminus \delta(X) \rightarrow P_f(Y) \setminus \delta(Y)$. Теперь установим гомеоморфизм $h' : \delta(X) \rightarrow \delta(Y)$. Известно, что для любого $\delta_x \in \delta(X)$ прообраз $(r_f^X)^{-1}(\delta_x)$ содержит точку δ_x . Гомеоморфизм h отображает множество $(r_f^X)^{-1}(\delta_x) \setminus \delta_x$ на некоторое множество $B_y \subset P_f(Y) \setminus \delta(Y)$. Это множество B_y совпадает с множеством $(r_f^Y)^{-1}(\delta_y) \setminus \delta_y$ для некоторого $\delta_y \in \delta(Y)$. т.е. существует $y \in Y$ такое, что $B_y = (r_f^Y)^{-1}(\delta_y) \setminus \delta_y$. В итоге точку $\delta_x \in \delta(X)$ ставим в соответствие точке $\delta_y \in \delta(Y)$. т.е. $h'(\delta_x) = \delta_y$. В силу непрерывности отображений r_f^X, r_f^Y и непрерывности гомеоморфизма h легко проверяется непрерывность отображения $h' : \delta(X) \rightarrow \delta(Y)$. Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Литература

[1]. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии Успех.мат.наук, 1991, Т.46, вып. 1, с.41-80

H_A –периодические основные состояния для модели Поттс-SOS на дереве Кэли

Расулова М.А.

Наманганский Государственный университет

e-mail: m_gasulova_a@rambler.ru

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k , где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k . Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка (см.[1]).

Мы рассматриваем модели, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{0, 1, 2\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$.

Определим G_k^* – периодическую конфигурацию $\sigma(x)$, которая является инвариантной относительно подгруппы $G_k^* \subset G_k$ конечного индекса, т.е. $\sigma(yx) = \sigma(x)$ для любых $x \in G_k, y \in G_k^*$. Конфигурация, которая является инвариантной относительно всех переходов, называется трансляционно-инвариантной.

Гамильтониан модели Поттс-SOS имеет вид

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + J_p \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \quad (1)$$

где $J, J_p \in \mathbb{R}$ — константы не равны нулю.

Пусть M — множество единичных шаров с вершинами в V . Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b . Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} \left(J \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b}} |\sigma(x) - \sigma(y)| + J_p \sum_{\substack{\langle x, y \rangle: \\ x, y \in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \right). \quad (2)$$

Лемма. Для каждой конфигурации φ_b мы имеем

$$U(\varphi_b) \in \{U_{i,n} : i = 0, 1, 2, \dots, k+1, n = 0, \dots, k+1-i\},$$

где

$$U_{i,n} = \frac{J}{2}(k+1+n-i) + \frac{J_p}{2}i. \quad (3)$$

Определение. Конфигурация φ называется основным состоянием для гамильтониана H , если

$$U(\varphi_b) = \min\{U_{i,n} : i = 0, 1, 2, \dots, k+1, n = 0, \dots, k+1-i\}$$

для любого $b \in M$.

Обозначим $C_{i,n} = \{\varphi_b : U(\varphi_b) = U_{i,n}\}$ и

$$A_{\xi,\eta} = \{(J, J_p) \in \mathbb{R}^2 : U_{\xi,\eta} = \min\{U_{i,n} : i = 0, 1, 2, \dots, k+1, n = 0, \dots, k+1-i\}\}. \quad (4)$$

С помощью (4) найдем следующие множества:

$$A_{k,0} = \{(J, J_p) \in \mathbb{R}^2 : J_p = J \geq 0\}, \quad A_{k,1} = \{(J, J_p) \in \mathbb{R}^2 : J_p = 2J, J \leq 0\}.$$

Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$. $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j \in A} w_j(x) - \text{четно}\}$, где $w_j(x)$ — число a_j в слове x . H_A — является нормальным делителем индекса 2.

Теорема. Пусть $k \geq 2$. Для модели Поттс-SOS справедливы следующие утверждения:

- 1) на множестве $A_{k,0}$ существуют $4k$ штук H_A — периодического основного состояния, которые не являются $G_k^{(2)}$ — периодическими и трансляционно-инвариантными;
- 2) на множестве $A_{k,1}$ существуют $2k$ штук H_A — периодического основного состояния, которые не являются $G_k^{(2)}$ — периодическими и трансляционно-инвариантными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.

О рекуррентных проективно Евклидовых пространствах

Сабыканов А.А., Микеш Й., Пешка П.

Киргизский национальный университет, Университет им. Палацкого, Оломоуц
e-mail: Almazbek.Asanovich@mail.ru, Josef.Mikes@upol.cz, Patrik_Peska@seznam.cz

Настоящая заметка посвящена вопросу о существовании n -мерных рекуррентных проективно евклидовых пространств.

Пространство аффинной связности со связностью ∇ называется симметрическим, рекуррентным и полусимметрическим, если его тензор кривизны R , соответственно, удовлетворяет следующим условиям $\nabla R = 0$, $\nabla R = \varphi \cdot R$ и $R \circ R = 0$. Геометрия этих пространств играет важную роль в теории римановых многообразий и их обобщениях, а также приложений в теоретической физике. Геодезические и голоморфно-проективные отображения этих пространств исследовались многими авторами, см. [1].

Компоненты аффинной связности проективного евклидова пространства имеют в проективной системе координат x следующую форму: $\Gamma_{ij}^h = \delta_i^h \psi_j + \delta_j^h \psi_i$, где ψ_i – некоторые функции. Для эквиаффинных рекуррентных проективно евклидовых пространств сформулированы результаты в [2]. Для неэквиаффинных имеет место

Теорема. В произвольном неполусимметрическом рекуррентном проективно-евклидовом пространстве A_n выполняется одна из систем условий

$$\psi_{ij} = \varkappa_i \varphi_j, \quad \varkappa_{i,j} = \varkappa_i (3\varkappa_j + 1/3 \varphi_j), \quad \varphi_{i,j} = \varphi_i (3\varkappa_j - 2/3 \varphi_j),$$

или

$$\psi_{ij} = \varkappa_i \varphi_j, \quad \varkappa_{i,j} = \varkappa_i (3\varkappa_j + (a-1) \varphi_j), \quad \varphi_{i,j} = \varphi_i (3\varkappa_j - a \varphi_j),$$

$$a_{,i} = (6a-4)\varkappa_i - b \varphi_i,$$

$$b_{,i} = (6a^2 - 10a + 9b + 4) \varkappa_i +$$

$$\varphi_i \{6(a-2/3)^3 - 5/3 b - 7(1/18 + b) \cdot (a-2/3) + 8(a-2/3)^2 +$$

$$a(a-2/3) \cdot f(b a^{-3/2} - 2a^{1/2} - 2/3 a^{-1/2})\},$$

где $\varkappa_i$, φ_i – некоторые неколлинеарные векторные поля, a , b – некоторые функции и f – некоторая дифференцируемая функция указанного аргумента, запятой « $,$ » – обозначаем ковариантную производную и $\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j$.

Указанные выше системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных вполне интегрируемы в пространстве A_n .

References

- [1] Mikeš J. et al. Differential geometry of special mappings, Palacky Univ., Olomouc 2019.
- [2] Sabykanov A.A., Mikeš J., Peška P. Recurrent equiaffine projective Euclidean spaces // Filomat. – 2018. – Vol. 33:4. – P. 7.

Условие седлообразности циклических поверхностей

Сафаров Т.Н.

Термезский Государственный Университет

e-mail: aartykbaev@mail.ru

В работе [1] дано классификация точек поверхности галилеева пространства, где точки регулярной поверхности разделяются на четыре типа, эллиптические, гиперболические, циклические и параболические.

Поверхности все точки, которого гиперболические называются седловыми, а также поверхностей, все точки которых циклические называются циклическими.

Также методом наложенного пространства получена формула связывающая евклидову полную кривизну K_E поверхности с галилеевой полной кривизной K .

$$K_E = \frac{\Delta}{*\Delta} K$$

где $\Delta, *\Delta$ - дискриминанты первых квадратичных форм.

В евклидовом пространстве классификация точек поверхности, соответствует со знаком полной кривизны. Поэтому такое же соответствие можно провести в галилеевом пространстве.

Но дело обстоит по иному, когда точка поверхности галилеева пространства циклическая. Потому что в циклических точках невозможно определять полную кривизну поверхности.

Исследование геометрии циклических поверхностей галилеева пространства дало следующий результат.

Теорема. Циклические поверхности являются седловыми поверхностями.

Ранее в работе [2] доказано, что циклические поверхности линейные поверхности.

References

- [1]. А.Артыкбаев, Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве - времени, Т.: Фан, 1991.
- [2]. Э.К.Курбонов. Циклические поверхности галилеева пространства//УзМЖ, 2001, №2. - 51-57 стр.

Топологическая структура времени вселенной событий и множества достижимости

Саитова С.С.

Национальный Университет Узбекистана

Время, на данный момент является основным параметром во вселенной событий. И это же время, оно рассматривалось как некий одномерный прямолинейный параметр. Пытаясь вникнуть в теорию струн квантовой физики, я пришла к следующему заключению: время не одномерно, не линейно, и тем более, не прямолинейно. Своей многомерной структурой время заполняет пространство

событий, и каждая его составляющая влечет или идет с тем или иным событием во вселенной в квантовой физике.

Пространство-время или событие, со своим моментом свершения имеют поразительную структуру, которую можно описать с использованием различных свойств топологических пространств.

Итак, предположим, что событие это некое компактное топологическое пространство. Для исследования этого пространства, мы изучим его составляющие, т.е. события, приведшие к данному. Более точнее мы рассматриваем, его замкнутые подмножества. Они образуют т.н. сцепленную систему (см. [8]). Сцепленная система порождает максимальную сцепленную систему, а все сцепленные системы данного топологического пространства образуют суперрасширение этого топологического пространства. Суперрасширение, это все варианты событий так или иначе связанные с заданным событием. А свершенные события в этом случае выражаются через полную сцепленную систему заданного топологического пространства (см. [8]).

Для дальнейшего исследования применим результаты из работ [1]-[7]. Для этого, допустим, что мы находимся в некой исходной точке пространства событий (предполагается, что данное пространство имеет необходимую математическую структуру) и делаем выбор, т.е. допускаем какие-то изменения, которые можно выразить векторными полями. Среди них имеются так называемые векторные поля Киллинга (см. [1]-[7]). Именно они являются объектом нижеследующих исследований. Траектории (см. [1], [2], [4]) заданных векторных полей, это "путь" по которому мы идем, сделав выбор. Всевозможные траектории исходной точки, образуют так называемую орбиту этой точки. Если финальная точка принадлежит орбите, то мы достигаем цели. Очевидно, что в этом случае время может быть любое. С другой стороны, в моих исследованиях выделены также так называемые множества Т-достижимости (см. [7]), т.е. некие подмножества орбиты с заданным "промежутком" времени. И опять, если финальная точка есть точка множества Т-достижимости, то мы достигаем "цель" в заданное "время".

Отдельное исследование множеств Т-достижимости показало, что в некоторых случаях множество Т-достижимости совпадает со всей орбитой. [7]

Литература

- [1]. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии векторных полей Киллинга // Ўзбекистон Респ ФА маърузалари. 2013, №5. с.3-5.
- [2]. Саитова С.С. О коммутирующих векторных полях Киллинга // Ўзбек Математик Журнал. 2013, №1. с.109-117.
- [3]. Нарманов А.Я., Саитова С.С. Foliations defined by closed differential 1-form // International Journal of Geometry. 2014, vol.3, №1. p.37-43.
- [4]. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии векторных полей Киллинга // Дифференциальные уравнения. 2014, №12. с.1-8.
- [5]. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии множества достижимости векторных полей Киллинга // Ўзбекистон Респ ФА маърузалари. 2016, №1. с.7-9.
- [6]. Саитова С.С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга // Ўзбек Математик Журнал, 2016, №4. с.49-58.
- [7]. Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии множества достижимости векторных полей // Дифференциальные уравнения. 2017, №3, том 53. с.321-328.

[8]. Ruzinazar B. Beshimov, Farkhod G. Mukhamadiev Some cardinal properties of complete linked systems with compact elements and absolute regular spaces *Mathematica Aeterna*, Vol. 3, 2013, no. 8, 625 - 633.

Кривизна многообразии $SO(3)$

Сапарбаева Д.А.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: Saparbaevadilya@gmail.com

Рассмотрим группу $SO(3)$. В касательном пространстве $T_E SO(3)$ существует базисные векторные поля X_1, X_2, X_3 . Эти базисы ортонормированы и скобка Ли базисных элементов определяется таблицей $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = X_2$. Известно, что линейный изоморфизм между $T_E SO(3)$ и R^3 является изометрией. Рассмотрим трёхмерную сферу радиуса 2 со стандартным Римановым метрикой. Векторы X_1, X_2, X_3 в стандартной метрике сферы S^3 образуют ортонормированный базис в $T_E S^3$ и как левоинвариантные поля ортонормированный базис для любой точки S^3 . Скалярное произведение $\langle X, Y \rangle_p = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$, для любого $X, Y \in T_E S^3$ такое, что

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3, Y = \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 X_3.$$

Введем новую метрику $\ll \cdot, \cdot \gg$ на S^3 следующим образом

$$\ll X, Y \gg = \frac{1}{2} \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3$$

Разница между метрикой $\ll \cdot, \cdot \gg$ и стандартной метрикой заключается в том, что каждое касательное пространство "сжимается" в направлении вектора X_1 .

Рассмотрим группу Ли $G = S^3 \times R$ с метрикой прямого произведения сферы и прямой. Эта метрика является биинвариантной. Алгебра Ли группы G получается из алгебры Ли группы S^3 путём сложения X_1, X_2, X_3 касательной к R единичного вектора X_4 , для которого $[X_i, X_4] = 0$ для всех i . Полученный базис является ортонормированным.

В этой работе улучшен результат который был получен в работе [4]. А именно доказано следующая

Theorem. Многообразие $G = S^3 \times R$ является многообразием положительной и ограниченной кривизны K , и $\frac{1}{12} \leq K \leq \frac{3}{4}$.

Литература

- [1]. Ш.Кобаяси, К.Номидзу. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.1.
- [2]. А.Бессе. многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990, 318с.
- [3]. O'Neil B. *Semi-Riemannian geometry (with applications to relativity)*. N.Y. etc.: Acad. Press, 1983, 468 p.
- [4]. Аслонов Ж. О. О многообразиях положительной кривизны. Вестник НУУЗ. Т. 2/1, 2018.

Об одной группе диффеоморфизмов слоеных многообразий

Шарипов Анваржон Солиевич

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: asharirov@inbox.ru

Множество $Diff^r(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия на себя является группой относительно композиции и обратного отображения. Группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет важное значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В.И. Арнольда [?].

Когда M является многообразием конечной размерности в 1939 году доказано группа изометрий $I(M)$ риманово многообразия M является группой Ли [?].

В данной работе рассматриваем слоеное многообразие с некоторым слоением и исследуем некоторую подгруппу группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Известно, что группа диффеоморфизмов является топологической группой в компактно-открытой топологии. В случае, когда многообразие компактно этот факт доказано в работе [[?], стр. 270]. Для произвольного многообразия конечной размерности этот факт доказано в работе [?].

Обозначим через $Diff_F(M)$ — множество всех C^r — диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F) , где $r \geq 0$. Группа $Diff_F(M)$ является подгруппой $Diff(M)$ и оно является топологической группой в компактно-открытой топологии.

Теорема 1. Пусть (M, F) слоеное многообразие, где M гладкое связное многообразие с конечной размерностью. Тогда группа $Diff_F(M)$ является замкнутой подгруппой группы $Diff(M)$ в компактно-открытой топологии.

Теперь рассмотрим некоторую топологию на группе $Diff_F(M)$, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n - мерным слоением [?]. Эту топологию называли слоено компактно-открытой топологией или коротко F — компактно-открытой топологией.

Определение. Изометрия $\phi : M \rightarrow M$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F) , если оно является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F) .

Обозначим через $Iso_F(M)$ множество всех C^r — изометрий слоеного многообразия (M, F) , где $r \geq 0$. Имеет место $Iso_F(M) = Diff_F(M) \cap Iso(M)$.

Теорема 2. Пусть (M, F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $Iso_F(M)$ является топологической группой с F — компактно-открытой топологией.

Литература

- [1]. Рохлин В., А. Фукс Д. Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
- [2]. Arnold V. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications a l'hydrodynamique des uides parfaits. Ann. Inst. Fourier, (1966), 16(1), 319-361.
- [3]. Myers S. and Steenrod N. The Group of Isometries of a Riemannian Manifold. Annals of Mathematics Second Series, (1939), 40(2) 400-416.

[4]. Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries. *Methods of Functional Analysis and Topology*, (2009), 15(2) 195-200.

[5]. Narmanov A., Sharipov A. *Geometry of Foliated Manifolds. Extracta mathematicae*, (2016), 31(2), pp. 189-197.

О геодезических линий слоеных многообразий

Шарипов А.С., Олломова Х.Т.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: asharipov@inbox.ru

Теория слоений - раздел геометрии, возникший на стыке дифференциальных уравнений и дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии. Истоком теории слоений считаются основополагающие работы С.Ehresmann[1] и G.Reeb[2] середины XX столетия.

Дальнейшее развитие геометрической теории слоений, изучающей свойства слоев, связано прежде всего с известными работами B.Reinhart[3], A.Haefliger[4], Wolak R.[5] и С.П.Новикова[6].

Определение. Кривая γ на гладком многообразии M называется геодезической, если касательное векторное поле $T_\gamma(t)$ параллельно вдоль γ , т.е. $\nabla_{T_\gamma} T_\gamma(t) = 0$.

Пример. Пусть для векторного поля $X \in V(M)$ выполнено условие $\nabla_X X = 0$, то каждая интегральная кривая γ поля X есть геодезическая связности. В самом деле $X \circ \gamma = \dot{\gamma} = \gamma_* D$, так что D и X являются γ -связанными, имеем

$$0 = (\nabla_X X) \circ \gamma = \nabla_D (X \circ \gamma) = \nabla_D \dot{\gamma}$$

В современной геометрии одним из основных задач является исследования предела геодезических линий, т.е. если геодезические сходятся к некоторой кривой, то эта последняя является ли геодезической.

В работе С.Хелгасона [7] доказаны замечательные теоремы о геодезических линий. В частности, им доказано, что предел геодезических линий риманова многообразия является геодезической. В случае слоеных многообразий эта задача осложняется тем, что геодезическая линия слоеного многообразия лежит на слое и является геодезической относительно индуцированной римановой метрики слоя.

Пусть $\pi : TM \rightarrow TF$ - ортогональная проекция, $V(M), V(F), V(H)$ - множество гладких сечений расслоений TM, TF, HF соответственно. Положим $\tilde{\nabla}_X Y = \pi(\nabla_X Y)$ для векторных полей $X \in V(M), Y \in V(F)$, где ∇ - связность Леви - Чевита, определенная римановой метрикой g на M . Известно, что $\tilde{\nabla}_X Y$ является связностью на TF , причем ее сужение на каждый слой L_α совпадает с связностью на L_α , определяемой индуцированной римановой метрикой на L_α из M .

Теорема. Пусть (M, F) слоеное полное риманово многообразие. Гладкая параметризованная кривая $\mu : (a, b) \rightarrow M$, лежащая на слое L_α слоения F , является геодезической на L_α (индуцированной римановой метрики) тогда и только тогда, когда $\tilde{\nabla}_{\dot{\mu}} \dot{\mu} = 0$.

Литература.

1. Ehresmann C., Reeb G. Sur les champs d'elements de contact de dimension complètement integrables dans une variete continuellement differentiable V_n // C.R.Acad. Sci. Paris. - 1944.-V.216.-P.628-630.
2. Reeb G. Sur certains proprietes topologiques des varietes feuilletées. Actualite Sci. Indust. 1183 - Paris: Hermann, - 1952.
3. Reinhart B. Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. of Math. 69 - 1959, - P.119-132.
4. Haefliger A. Varietes feuilletées // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. - 1962. - V.16. - P.367-397.
5. Wolak R. Geometric structures on foliated manifolds. Publ. Depart. Geometria y topologia. V. 76 - Santiago de Compostela: Univ. Santiago de Compostela, - 1989. - P.198.
6. Новиков С.П. Топология слоений. Труды Московского математического общества. - М.: - 1965. -Т.14. - С.248-278.
7. Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces// American Mathematical Society. - 2001. - 640 p.

О бесконечно малых эквиариальных деформациях поверхности

Шеркузиев М.

Ташкентский финансовый институт

e-mail: aartykbaev@mail.ru

Рассмотрим произвольную бесконечно малую деформацию трижды непрерывно дифференцируемой поверхности $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ с вектором смещения $\varepsilon \vec{t}(u, v)$, где $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\vec{x}^* = \vec{x}(u, v) + \varepsilon \vec{t}(u, v) \quad (55)$$

Потребуем, чтобы при этой деформации не изменялся элемент площади поверхности с точностью 1-го порядка относительно $\varepsilon \rightarrow 0$. Такую деформацию назовем *эквиариальной*. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были равны с указанной точностью дискриминанты первых квадратичных форм поверхностей $\vec{x}(u, v)$ и $\vec{x}^*(u, v)$. В дальнейшем мы будем пренебрегать величинами второго и более высокого порядка малости относительно $\varepsilon \rightarrow 0$.

Имеем

$$[\vec{x}_u^* \vec{x}_v^*]^2 = [\vec{x}_u \vec{x}_v]^2 + 2\varepsilon [\vec{x}_u \vec{x}_v] \cdot ([\vec{x}_u \vec{t}_v] + [\vec{t}_u \vec{x}_v]).$$

Следовательно, для того, чтобы деформация (55) была эквиариальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$[\vec{x}_u \vec{x}_v] \cdot ([\vec{x}_u \vec{t}_v] + [\vec{t}_u \vec{x}_v]) = 0 \quad (56)$$

Теперь запишем формально разложения для $\vec{t}_u$ и $\vec{t}_v$ по векторам $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ и $\vec{n}$, где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали поверхности:

$$\begin{cases} \vec{t}_u = \alpha \vec{x}_u - \beta \vec{x}_v + \lambda \vec{n} \\ \vec{t}_v = \gamma \vec{x}_u - \delta \vec{x}_v + \mu \vec{n}. \end{cases}$$

Из условия (56) вытекает, что $\alpha = \delta$, тогда получим:

$$\begin{cases} \vec{t}_u = \alpha \vec{x}_u - \beta \vec{x}_v + \lambda \vec{n} \\ \vec{t}_v = \gamma \vec{x}_u - \alpha \vec{x}_v + \mu \vec{n}. \end{cases} \quad (57)$$

Так как $\vec{t}_{uv} = \vec{t}_{vu}$, то получим три дифференциальных уравнения, связывающих пять неизвестных функций $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu$:

$$\begin{cases} \alpha_v - \gamma_u - \gamma \Gamma_{11}^1 + 2\alpha \Gamma_{12}^1 - \beta \Gamma_{22}^1 = \mu \frac{FM-GL}{EG-F^2} - \lambda \frac{FN-GM}{EG-F^2} \\ \alpha_u - \beta_v - \gamma \Gamma_{11}^2 + 2\alpha \Gamma_{12}^2 - \beta \Gamma_{22}^2 = \mu \frac{FL-EM}{EG-F^2} - \lambda \frac{FM-EN}{EG-F^2} \\ \beta N - 2\alpha M + \gamma L = \lambda_v - \mu_u. \end{cases} \quad (58)$$

Задавая произвольным образом функции λ и μ , получим неоднородную систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций α, β, γ . Если положить $\lambda = 0$, $\mu = 0$ то получим однородную систему уравнений, совпадающую с той системой, которая определяет вектор вращения $\vec{y}(u, v)$ некоторого бесконечно малого изгиба данной поверхности:

$$\begin{cases} y_u = \alpha \vec{x}_u - \beta \vec{x}_v \\ y_v = \gamma \vec{x}_u - \alpha \vec{x}_v \end{cases} \quad (59)$$

Рассмотрим два решения системы (58) при одних и тех же функциях λ, μ :

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda, \mu \\ &\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \lambda, \mu. \end{aligned}$$

Разности $\alpha_2 - \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1$, $\gamma_2 - \gamma_1$ дают решение этой однородной системы и стало быть, это решение определяет вектор вращения бесконечно малого изгиба той же поверхности, причем в формулах (59) следует положить $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, $\beta = \beta_2 - \beta_1$, $\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$.

References

[1]. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – Москва: Наука. Государственное издательство физико-математической литературы, 1988. – 512 с.

О кривизне-кручении пространства со связностью Картана

Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В.

Рассмотрим $(r+n)$ -мерное пространство картановой связности C_{r+n} , определяемое структурными уравнениями

$$d\omega^i = 2C_{j\alpha}^i \omega^j \wedge \omega^\alpha + K_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (60)$$

$$d\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + 2C_{\beta i}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^i + K_{jk}^\alpha \omega^j \wedge \omega^k, \quad (61)$$

где $\alpha, \dots = \overline{1, r}; i, \dots = \overline{r+1, r+n}; K_{(jk)}^i = 0, K_{(jk)}^\alpha = 0; C_{j\alpha}^i, C_{\beta\gamma}^\alpha, C_{\beta i}^\alpha$ – часть постоянных $C_{JK}^I(I, \dots = \overline{1, r+n})$ группы Ли G_{r+n} , содержащей подгруппу H_r ($C_{\alpha\beta}^i = 0$). Постоянные C_{JK}^I удовлетворяют тождествам Якоби $C_{J\{K}^I C_{LM\}^J =$

0. Коэффициенты K_{jk}^I образуют объект кривизны-кручения, содержащий объект кручения K_{jk}^i . Пространство C_{r+n} является главным расслоением $H_r(M_n)$ с n -мерной базой M_n и типовым слоем H_r . Если выполняется условие редуктивности $C_{\beta i}^\alpha = 0$, то расслоение $H_r(M_n)$ становится пространством с главной связностью.

Внешние уравнения (1, 2) пространства C_{r+n} позволяют найти дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны-кручения. Продифференцируем структурные уравнения (1, 2) внешним образом, затем используем соответствующие части тождеств Якоби. Разрешим полученные кубические уравнения по лемме Лаптева, что даст квадратичные уравнения и условия полуголономности. К квадратичным уравнениям применим лемму Картана, найдем пфаффовы уравнения, которые проальтернируем. Воспользовавшись антисимметрией объекта кривизны-кручения и условиями полуголономности, запишем результат в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм ω^l :

$$\Delta K_{jk}^i + 4C_{\alpha[j}^i C_{k]\beta}^\alpha \omega^\beta \cong 0(mod \omega^l), \quad (62)$$

$$\Delta K_{jk}^\alpha - 2C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^i \omega^\beta - 4C_{\gamma[j}^\beta C_{k]\beta}^\alpha \omega^\gamma \cong 0, \quad (63)$$

где Δ – тензорный дифференциальный оператор.

Теорема. Объект кривизны-кручения K_{jk}^I пространства со связностью Картана C_{r+n} , определяемого структурными уравнениями (1, 2), является квазитензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (3,4). Квазитензор K_{jk}^I содержит квазитензор кручения K_{jk}^i .

Следствие. Квазитензор кривизны-кручения K_{jk}^I станет тензором при выполнении условий тензорности $C_{\beta[j}^I C_{k]\gamma}^\beta = 0$, причем для тензорности квазитензора кручения K_{jk}^i достаточно условий $C_{\beta[j}^i C_{k]\gamma}^\beta = 0$. В частности, если выполняется условие редуктивности, то квазитензор K_{jk}^I является тензором, содержащим подтензор K_{jk}^i .

Замечание. В пространстве проективной связности Картана условие редуктивности не выполняется, т.е. оно не является пространством с главной связностью, но обладает тензором кривизны-кручения. Значит, для него выполняются условия тензорности.

О внутренней геометрии поверхности Галилеева пространства

Собиров Ж.А.

Навоийский Государственный Педагогический институт
e-mail: aartykbaev@mail.ru

Вырожденность метрики галилеева пространства порождает вырожденную метрику на поверхности в R_3^1 .

В работе [1] с помощью кривых ограниченного поворота определен аналог «кратчайшей» на поверхности галилеева пространства. Кратчайшая галилеева пространства, обладает свойствами кратчайшей евклидова пространства.

Внутренняя геометрия поверхности существенно зависит от внутренней геометрии его касательной плоскости.

Касательная плоскость поверхности в R_3^1 является галилеевой плоскостью.

Лемма. Проекция геодезического треугольника на поверхности $F \in R_3^1$, является треугольником на касательной плоскости.

Пусть ABC треугольник галилеевой плоскости, $F \in R_3^1$ тогда для углов треугольника справедливо равенство $\angle B = \angle A + \angle C$, где $\angle B$ - измеряется внешним образом. Если внутренний угол считать $\angle B$, то получим

$$\angle A + (-\angle B) + \angle C = 0$$

то есть сумма внутренних углов треугольника на галилеевой плоскости равна нулю.

Теорема. Сумма внутренних углов треугольника на седловой поверхности галилеева пространстве отрицательно.

References

[1]. Артыкбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени, Т.: Фан, 1991. -180 с.

Поверхности, определяемые символами Кристоффеля

Султанов Б.М.

PhD студент кафедры Геометрии и топологии Национального Университета
e-mail: bek_4747@bk.ru

В работе [1] Гауссова кривизна поверхности в специальных координатах вычисляется по формуле:

$$K = \frac{LN - M^2}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}} \right)_v - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{du^2}$$

Выражение $\frac{F_u - \frac{1}{2}E_v}{\sqrt{G}}$ называется дефектом кривизны поверхности

$$D(u, v) = F_u - \frac{1}{2}E_v = r_{uu} \cdot r_v.$$

где

$$F = y_u y_v + z_u z_v, \quad E = y_u^2 + z_u^2$$

Тогда $D(u, v) = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{r}_v = |\vec{r}_{uu}| \cdot |\vec{r}_v| \cos \phi$, $|\vec{r}_v| = \sqrt{G(u, v)}$, где ϕ - угол между векторами $\vec{r}_{uu}$ и $\vec{r}_v$ на особой плоскости [2].

Значения дефекта кривизны связаны с выбором координатной линии $v = const$, подбором системы криволинейных координат можно добиться $D(u, v) \equiv 0$.

Рассмотрим в R_3^1 уравнение поверхности в векторной форме [1]:

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}$$

Определение 1. Интервал $[a, b]$ - назовем шириной поверхности F в Галилеевом пространстве.

Определение 2. Полуизометричными поверхностями назовем поверхности, которые имеют равные ширины.

Определение 3. Полуизометричные поверхности F_1 и F_2 называются изометричной, если:

$$G_1(u, v) = G_2(u, v).$$

Определение 4. Изометричные поверхности F_1 и F_2 называются вполне изометричным, если:

$$D_1(u, v) = D_2(u, v).$$

Если $D(u, v) = 0$, тогда Гауссова кривизна определяется по формуле

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G(u, v)}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G(u, v)}}{\partial u^2} = \frac{G_u^2(u, v) - 2G_{uv}(u, v)G(u, v)}{4G^2(u, v)}.$$

Лемма. Если даны символы Кристоффеля $\Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2$, то $G(u, v)$ решения дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^2 = \frac{G_u(u, v)}{2G(u, v)} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{G_v(u, v)}{2G(u, v)}. \end{cases}$$

Пусть F_1 и F_2 регулярные полуизометричные поверхности.

Теорема. Поверхности с равными коэффициентами $\Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2$ - изометричные.

Следствие из теоремы. Поверхности с равными $\Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^2, D(u, v)$ - вполне изометричны.

References

- [1]. А.Арткбоев., Д.Д.Соколов. Геометрия в целом в пространстве-время “ Т.: Фан. 1991. 179 с.
- [2]. Э.К.Курбонов. О поверхности галилеева пространства. УзМЖ, 2005, №1, с.51-56.

Ограниченность и компактность одного класса матричных операторов с переменными пределами суммирования

Темирханова А.М.

¹ ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
e-mail: ainura_t@yandex.kz

Пусть $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $\{u_i\}_{i=1}^\infty, \{v_i\}_{i=1}^\infty$ - весовые последовательности, то есть неотрицательные последовательности действительных чисел. Пусть l_{pv} - пространство последовательностей действительных чисел $f = \{f_i\}_{i=1}^\infty$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f_i v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 < p < \infty$$

Рассмотрим матричный оператор

$$(Af)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} a_{n,k} f_k, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

из l_{pv} в l_{qu} , где $(a_{n,k})$ - матрица оператора A с неотрицательными элементами $a_{n,k}$, удовлетворяющие дискретному обобщенному условию Ойнарова: существует $d > 0$, неотрицательная матрица с элементами $b_{n,k}$ и неотрицательная последовательность $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$, что

$$\frac{1}{d}(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}) \leq a_{n,m} \leq d(b_{n,k}\omega_m + a_{k,m}) \quad (2)$$

при $1 \leq k \leq n, \alpha(n) \leq m \leq \beta(k)$; где $\alpha(n), \beta(n)$ - последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ строго возрастают;
- (ii) $\alpha(1) = \beta(1) = 1$ и $\alpha(n) < \beta(n), n \geq 2$;

При $a_{n,k} = 1$ оператор (1) является оператором Харди с переменными пределами следующего вида

$$(Hf)_n = \sum_{k=\alpha(n)}^{\beta(n)} f_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

ограниченность которого из l_{pv} в l_{qu} исследована в работах [1], [2] при различных значениях параметров пространства.

В данной работе устанавливаются критерии ограниченности и компактности матричного оператора (1) из l_{pv} в l_{qu} при $1 < p \leq q < \infty$.

Положим

$$(F_1)_s = \sup_{\beta^{-1}(\alpha(s)) \leq m \leq s} \left(\sum_{n=m}^s u_n^q b_{n,m}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} \nu_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(F_2)_s = \sup_{\beta^{-1}(\alpha(s)) \leq m \leq s} \left(\sum_{n=m}^s u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{m,k}^{p'} \nu_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$F_1 = \sup_{s \in \mathbb{N}} (F_1)_s, \quad F_2 = \sup_{s \in \mathbb{N}} (F_2)_s.$$

Теорема 1. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и элементы матрицы $(a_{n,k})$ удовлетворяют условию (2). Тогда оператор (1) ограничен из l_{pv} в l_{qu} тогда и только тогда, когда $F = \max\{F_1, F_2\} < \infty$, при этом $\|A\|_{l_{pv} \rightarrow l_{qu}} \approx F$.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq q < \infty$ и элементы матрицы $(a_{n,k})$ удовлетворяют условию (2). Тогда оператор (1) компактен из l_{pv} в l_{qu} тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (F_1)_m = 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (F_2)_m = 0$$

где

$$(F_1)_m = \sup_{m \leq s \leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^s u_n^q b_{nm}^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} \omega_k^{p'} \nu_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(F_2)_m = \sup_{m \leq s \leq \alpha^{-1}(\beta(m))} \left(\sum_{n=m}^s u_n^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=\alpha(s)}^{\beta(m)} a_{mk}^{p'} \nu_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отметим, что $F_1 = \sup_{m \in N} (F_1)_m$, $F_2 = \sup_{m \in N} (F_2)_m$.

References

- [1]. А. Альхалил. *Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I*. Вестник РУДН. Серия "Математика. Информатика. Физика".-2010.-№4.-с.56-69.
- [2]. А. Альхалил. *Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования II*. Вестник РУДН. Серия "Математика. Информатика. Физика".-2011.-№1.-с.5-13.

О некоторых свойствах многозначного отображения

Тухтасинов М.

Национальный университет Узбекистана им.М.Улугбека
e-mail: mumini51@mail.ru

В данной работе рассматриваются многозначные отображения в бесконечномерном пространстве и их некоторые свойства [?, ?]. При этом в отдельных случаях присутствуют полугруппы операторов, которые могут быть использованы для решения дифференциальных уравнений с распределенными параметрами.

Пусть H — гильбертово пространство. Многозначным отображением будем называть функцию $\Gamma : [0, \tau] \rightarrow K(H)$, где τ — положительное число, $K(H)$ — семейство всех выпуклых замкнутых и ограниченных подмножеств пространства H .

Определение 1. Многозначное отображение $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ называется полунепрерывным сверху (пн.св.) [полунепрерывным снизу (пн.сн)] в точке $t_0 \in [0, \tau]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ и $0 \leq t \leq \tau$, имеет место включение

$$\Gamma(t) \subset \Gamma(t_0) + \varepsilon S, \quad [\Gamma(t_0) \subset \Gamma(t) + \varepsilon S],$$

где S — единичный шар с центром в нуле пространства H .

Многозначное отображение $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ называется пн. св (пн. сн) на отрезке $[0, \tau]$, если оно пн.св. (пн.сн.) в каждой точке отрезка $[0, \tau]$.

Многозначное отображение $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ непрерывно в точке $t_0 \in [0, \tau]$, если оно, и пн.св., и пн.сн. в точке t_0 .

Непрерывность на отрезке $[0, \tau]$ вводятся аналогичным образом.

Пусть B – некоторое подмножество пространства H ; тогда через (h, B) обозначим множество всех чисел вида (h, b) , где $b \in B$, (h, b) – скалярное произведение элементов h и b пространства H .

Определение 2. Мнозначное отображение $\Gamma(t)$ называется сл.пн.св. в точке $t_0 \in [0, \tau]$, если для любых $\varepsilon > 0$, $h \in H$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|t - t_0| < \delta$ и $0 \leq t \leq \tau$ имеет место включение $(h, \Gamma(t)) \subset (h, \Gamma(t_0)) + \varepsilon(h, S)$.

Аналогично вводятся понятия сл.пн.св., сл.непр. в точке и на отрезке $[0, \tau]$. Введем следующее обозначение:

$$\text{dom}\Gamma = \{t \in [0, \tau] : \Gamma(t) \neq \emptyset\}.$$

Лемма 1. Если $\Gamma_1(t)$, $\Gamma_2(t)$ пн.св. на отрезке $[0, \tau]$, то $\Gamma(t) = \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$ сл.пн.св. на множестве $\text{dom}\Gamma$.

Определение 3. Функция $\gamma : [0, \tau] \rightarrow H$ называется сл.непрерывной, если для каждого $h \in H$ действительная функция $(h, \gamma(t))$ непрерывна.

Определение 4. Функция $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, называется однозначной сл.непрерывной ветвью многозначного отображения $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, если:

- 1) $\gamma(t)$ сл. непрерывна на $[0, \tau]$; 2) $\gamma(t) \in \Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$.

Теорема 1. Если $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ – непрерывное выпуклое замкнутое и ограниченное многозначное отображение, то существует сл.непрерывная однозначная ветвь.

Пусть $\{\Phi(t)\}$, $0 \leq t \leq \tau$ – сильно непрерывная полугруппа операторов, отображающих гильбертово пространство H в себя [?]. Нетрудно показать, что если R – выпуклое замкнутое и ограниченное подмножество H , то при каждом $t \in [0, \tau]$ множество $\Phi(t)R$ также является выпуклым замкнутым и ограниченным подмножеством пространства H , т.е. $\Phi(\cdot)R : [0, \tau] \rightarrow K(H)$.

Теорема 2. Если $\Phi(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ – сильно непрерывная компактная полугруппа, то многозначное отображение $\Phi(t)R$, $0 \leq t \leq \tau$, где R – выпуклое замкнутое и ограниченное подмножество пространства H является непрерывным на отрезке $[0, \tau]$.

Определение 5. Интегралом от многозначного отображения $\Gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, называется следующее множество: $W = \left\{ \int_0^\tau \gamma(t) dt : \gamma(t) \in \Gamma(t), 0 \leq t \leq \tau \right\}$, где $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, функция интегрируемая по Бохнеру [?], и обозначается через $\int_0^\tau \Gamma(t) dt$.

Теорема 3. Пусть R – выпуклое замкнутое и ограниченное подмножество пространства H , $\{\Phi(t)\}$ – сильно непрерывная полугруппа. Тогда интеграл от многозначного отображения $\Phi(t)R$,

$$W = \int_0^\tau \Phi(t)R dt$$

является выпуклым замкнутым и ограниченным множеством.

Ниже приводимое исследование посвящено изучению свойств объединений многозначных отображений. В работе [?] имеется результат, относящийся к пересечениям многозначных отображений.

Данный результат может быть использован для выяснения структуры области достижимости, множества управляемости в управляемых системах [?, ?, ?].

Теперь, дадим определение полунепрерывности сверху для многозначных отображений $\Gamma : [0, \infty) \rightarrow 2^{R^n}$, где 2^{R^n} – всевозможные непустые подмножества пространства R^n , т.е. значением $\Gamma(t)$ является произвольное непустое подмножество пространства R^n .

Определение 6. Многозначное отображение $\Gamma : [0, \infty) \rightarrow 2^{R^n}$ называется полунепрерывным сверху (пн.св) в точке $t = t_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждого $R > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из $|t - t_0| < \delta$ следует

$$d(\bar{\Gamma}(t) \cap S_R(t_0), \bar{\Gamma}(t_0) \cap S_R(t_0)) < \varepsilon,$$

где $d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min\{r > 0 : \Gamma_1 \subset \Gamma_2 + S_r\}$, Γ_1, Γ_2 – компактные множества в R^n , S_r – замкнутый шар радиуса r с центром в нуле пространства R^n , $\bar{G}$ – замыкание множества G .

Теорема 4. Пусть многозначное отображение $\Gamma : [0, \infty) \rightarrow 2^{R^n}$ замкнутозначно (т.е. множество $\Gamma(t)$ замкнуто) и полунепрерывно сверху в каждой точке $t \in [0, \infty)$. Тогда множество

$$\Gamma = \bigcup_{t \in [0, \infty)} \Gamma(t)$$

является измеримым множеством R^n .

References

- [1]. Балакришнан А.В. *Прикладной функциональный анализ*. – М.:Наука, – 1980. – 384 с.
- [2]. Тухтасинов М. О некоторых свойствах многозначных отображениях в гильбертовых пространствах// *Известия ВУЗов РУз*. – Ташкент. – 2000. – №1,2. – С. 74 - 78.
- [3]. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*. – М.: Наука, – 1977. – 624 с.
- [4]. Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления*. – М.: Наука, – 1972. – 576 с.
- [5]. Нарманов А.Я. О зависимости множества управляемости от целевой точки// *Дифференц. уравнения*. – 1997. – Т.33. – №10. – С.1334 - 1338.

Полное решение задачи конфликта с интегрально-ограниченным и импульсным управлением для одного класса дифференциальных игр

Тухтасинов М.¹, Хайиткулов Б. Х.²

НУУз, Ташкент, Узбекистан^{1,2}

*mumin51@mail.ru*¹, *b.hayitqulov@mail.ru*²

В работе [1] метод разрешающих функций использован для решения задачи конфликта в дифференциальных играх преследования с импульсным управлением и управлением с геометрическими ограничениями. Более общая задача с интегральными ограничениями приводится в [2].

В данной работе рассмотрен альтернатив решения задачи конфликта для одного класса дифференциальных игр преследования.

Рассматривается управляемый объект с движением

$$\dot{z} = \lambda z + u - v, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где λ – действительное положительное число, $z, u, v \in \mathbb{R}^n$. Терминальным множеством для игры (1) является начало координат: $M^* = \{0\}$. Тогда $M^0 = M = \{0\}$. Поэтому $L = \mathbb{R}^n$, π – тождественный оператор [2]. Так как $A = \lambda I$, где I – квадратная матрица порядка $n \times n$, то фундаментальная матрица имеет вид $e^{tA} = e^{t\lambda}I$. Предположим, что $\tau_i = i\Delta$, $i = 0, 1, \dots$, Δ – период времени.

Допустимыми управлениями преследователя являются измеримые функции $u(t)$, $t \geq 0$, с интегральным ограничением

$$\int_0^\infty \|u(\vartheta)\|^2 d\vartheta \leq \rho^2,$$

а управлениях убегающего имеют импульсный характер, которые задаются в виде $v(t) = \sum_{i=0}^\infty v_i \delta(t - i\Delta)$, где $\delta(t)$ – обобщенная функция Дирака, $v_i \in V = \sigma S$, $\sigma 0$, S – единичный шар с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^n$.

Введем обозначения $E = \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda\Delta}}{2\lambda}}$, $E_t = \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda(t-k\Delta)}}{2\lambda}}$, $k\Delta \leq t < (k+1)\Delta$, и пусть $n(t)$ означает целую часть отношения $\frac{t}{\Delta}$.

Определение 1. Будем говорить, что в игре (1) можно завершить преследование из начальной точки $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0$ за время $\tau = \tau(x_0)$, если существует такое допустимое управление преследователя $u(t)$, $t \in [0, \tau]$, что при любом выборе $v_i \in V$, решение $z(t)$, $0 \leq t \leq \tau$ уравнения (1), соответствующее управлениям $u(t)$, $v(t) = \sum_{i=0}^\infty v_i \delta(t - i\Delta)$, удовлетворяет равенству: $z(\tau) = 0$. При этом для вычисления $u(t)$ на интервале $[i\Delta, (i+1)\Delta)$ времени используется значения z_0 , v_i , $i = 0, 1, \dots$.

Определение 2. Будем говорить, что в игре (1) возможно уклонения от встречи с точкой 0 при движении из точки $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $z_0 \neq 0$, если существует такие $v_i \in V$, $i = 0, 1, \dots$, что при любом допустимом управлении преследователя $u(t)$, $t \in [0, \infty)$ решение $z(t)$ уравнения (1), соответствующее управлениям $u(t)$, $v(t) = \sum_{i=0}^\infty v_i \delta(t - i\Delta)$, удовлетворяет неравенству: $z(t) \neq 0$, $t \geq 0$. При этом для выбора v_i разрешается использовать только z_0 .

Рассмотрим взаимно исключающиеся условия: I) $E \leq \frac{\sigma}{\rho}$, II) $E > \frac{\sigma}{\rho}$.

Утверждение 1. Если выполнено условие I), то из любой точки z^0 , ($z^0 \neq 0$) возможно уклонение от встречи с точкой 0 и справедливо неравенство $|z(t)| > h(t)e^{\lambda t}$, где $h(t) > 0$ при $t \geq 0$.

Для условия II) $E > \frac{\sigma}{\rho}$ будем считать, что $\Phi(\tilde{n}) = \max_{1 \leq k} \Phi(k)$, где

$$\Phi(k) = \rho E \sqrt{1 + e^{-2\lambda\Delta} + \dots + e^{-2\lambda k\Delta}} - \sigma(1 + e^{-\lambda\Delta} + \dots + e^{-k\lambda\Delta}).$$

Утверждение 2. Если $\Phi(\tilde{n}) > \|z_0\|$, то из точки z_0 возможно осуществить поимку.

Утверждение 3. Если $\|z_0\| \Phi(\tilde{n})$, то при движении из точки z_0 можно уклониться от встречи с точкой 0.

При $\lambda > 0$ задача конфликта решена.

Замечание 1. В работе [2], в случай $\lambda = 0$, задача полностью решена.

Замечание 2. При $\lambda < 0$ существует решение задачи преследования и убегания.

Список литературы

[1]. Чикрий А.А., Матичин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков.// Тр.Ин-та матем. и механики УрО РАН. 11:1(2005), 212-224.

[2]. Тухтасинов М. Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков.// Тр.Ин-та матем. и механики УрО РАН. 22:3(2016), 273-282.

Сеть пространства

Турдиев Ш.Р.

Национальный Университет Узбекистана

e-mail: turdiyev.shodmon@mail.ru

В работе исследуется сеть пространство $\{S \in S_c(X) : \lim S = x\}$. Пусть X - топологическое T_1 -пространство. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $\exp X$. Семейство всех множеств вида

$$O\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \left\{ F : F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

где $U_1, U_2, \dots, U_n$ - непустые открытые подмножества пространства X , порождает топологию на множестве $\exp X$. Эта топология называется топологией Виеториса. Множество $\exp X$ с топологией Виеториса называется экспоненциальным пространством или гиперпространством пространства X .

Пусть X - топологическое T_1 -пространство. Обозначим через $\exp_n X$ множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства мощности, не превосходящей кардинального числа n т.е. $\exp_n \{F \in \exp X : |F| \leq n\}$. Положим $\exp_\omega \bigcup \{\exp_n X : n = 1, 2, \dots\}$, $\exp_c X = \{F \in \exp X : F = X\}$. Ясно, что $\exp_n X \subset \exp_\omega X \subset \exp_c X \subset \exp X$. для любого топологического пространства X .

Пусть топологическое пространство X не имеет изолированных точек. Для пространство X и для любой точки $x \in X$ через $S_c(X, x)$ обозначим множество всех $\{S \in S_c(X) : \lim S = x\}$ и определим множество $L_X = \{y \in X : S_c(X, x) \neq \emptyset\}$. Ясно, что множество $S_c(X, x) \subset \exp_c X \subset \exp X$.

Семейство σ множеств называется сетью в X (или сетью пространство X), если каждое открытое множества, является объединением некоторого семейство элементов σ . Если σ -сеть в X и все элементы σ - открытые множества, то σ называют базой пространства X (или базой топологии, заданной на X)

Теорема.. Пусть R^n - евклидово пространство. Тогда $nw(R^n) = nw(S_c(R^n))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. Москва: Физматлит. 2006. - 332 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986. - 752 с.
3. А.В. Архангельский, В.И. Пономарев Основы Общей топологии в задачах и упражнениях. Москва 1974.
4. David Maya-Patricia Pellecer-Covarrubias-Roberto Pichardo-Mendoza, Cardinal functions of the hyperspace of convergent sequences, *Mathematica Slovaca* 68 (2018), No. 2, 431-450.

Задача восстановления поверхности от произведенной проекции источника

Турдиев Халим Хамроевич, Хайитова Хилола Гафуровна

Бухарский государственный университет

e-mail: hturdiev@mail.ru, hayitova.hilola@mail.ru

Абстракт: В данном сообщении приводится задача восстановления поверхности, условия устойчивости для задачи и теорема единственности.

Постановка задачи: Пусть даны вектор $a(\alpha)$, лежащий на плоскости $x_2 = 0$, луч опускающийся на плоскости OX_1 , а также угол $\alpha \in [-\pi, 0]$ между осью $x_2 = 0$ и $a(\alpha)$ (по положительному направлению с осью). Пусть имеет место для систем направленных прямых $\{l_r^\alpha\}$ следующее.

Для любых $r = (r_1, r_2)$ направление $\{l_r^\alpha\}$ вектора $a(\alpha)$ одинаковое, для $\alpha \in [-\pi, 0]$ прямые $\{l_r^\alpha\}$ заполняют пространство $\mathbb{R}^3$, $\{l_r^\alpha\}$ проходит через точку $(r_1, r_2, 0)$ для $\alpha \in (-\pi, 0)$ для $\alpha = -\pi$ и $\alpha = 0$ проходит через точку $(r_1, r_2, 0)$. Обозначим через $\{l_r(\beta)\} \subset \{l_r^\alpha\}$ множество всех прямых вида где $\beta \in [-\pi, 0]$ и $r \in \mathbb{R}^3$ постоянное число.

Рассмотрим гладкую поверхность вида шапочки H , лежащую на пересечении плоскостях $x_3 = 0$ и $x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0$.

Теорема. Для любых $\alpha \in A$ на плоскости $x_3 = 0$ даны линии $P_\alpha(H)$ и $L_\alpha(H)$, эти линии не определены на $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда, существует не более одной поверхности H вида шапочки, принадлежащей к классу $\mathbb{C}^1$ который, для некоторых множеств $P_\alpha(H)$, $L_\alpha(H)$ полностью охватывает плоскости тени.

Список литературы

1. Begmatov Akbar H. On reconstruction of surfaces by shadow contours, *J. of Inv. Ill-Posed Problems*, 10 (2002), № 3, pp. 213-220.
2. Успенский С. В. О восстановлении функции, заданной интегралами по одному семейству конических поверхностей // *Сиб. мат. журн.*, 1977. Т. 18, № 3. С. 675-684.

О Z -свойствах пространства вероятностных мер с конечными носителями определенных бесконечном компакте.

З.О. Турсунова, (ТГПУ), У.Т. Ражабов, (ТГПУ).

e-mail:tu-zulya@mail.ru

В данной заметке для функторов P_n и P_ω [1], в категории компактов и непрерывных отображений в себя, имеет место следующая:

Теорема. Для любого бесконечного компакта X и для любого $n \in N$ подпространство $P_n(X)$ есть Z -множество в $P_\omega(X)$

Доказательство. Пусть X бесконечный компакт и $n \in N$. Для любого $\varepsilon > 0$ искомую отображению $f_\varepsilon : P_\omega(X) \setminus P_n(X) \rightarrow P_\omega(X) \setminus P_n(X)$ $f_\varepsilon(\mu) = (1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon\mu_0$, $\mu_0 \in P_\omega(X) \setminus P_n(X)$

$$\begin{aligned} \mu_0 &= m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_{n+2}\delta_{x_{n+2}}, \sup p\mu_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ |f_\varepsilon(\mu) - \mu| &= |(1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon\mu_0 - \mu| = |\mu - \varepsilon\mu + \varepsilon\mu_0 - \mu| = |\mu_0 - \mu| \cdot \varepsilon \\ f_\varepsilon(P_\omega(X)) \cap P_n(X) &= \emptyset \quad (f_\varepsilon, id_{P_\omega(X)}) \langle U \end{aligned}$$

для каждого $U \in cov(P_\omega(X))$

Допустим U некоторое семейство подмножеств пространства X . Говорим, что две отображения $f, g : Y \rightarrow X$ U -замкнуто (пишем $(f, g) \langle U$, если для каждого $y \in Y$ имеет место $f(y) \neq g(y)$ и $U \in U$, $f(y), g(y) \in U$. Через $cov(X)$ обозначается семейство всех открытых покрытий пространства X .

Иногда используется следующее эквивалентное определение Z -множеств пространства X . Множество A пространства X называется (сильным) Z -множеством в X , если A замкнуто и для каждого покрытия $U \in cov(X)$ имеется отображение $f : X \rightarrow Y$ такое, что $(f, id_X) < U$ и $f(X) \cap A = \emptyset$ (соответственно, $Cl_X f(A) \cap A = \emptyset$). Значит, $P_n(X)$ есть Z -множество в $P_\omega(X)$. Теорема доказана.

В работе [2] имеет следующая

Предложение. Пусть A топологически полное подмножество ANR пространства X которое является $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ и A_n есть Z -множество в X . Тогда A есть Z -множество в X .

Литература

- [1]. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии Успех.мат.наук, 1991, Т.46, вып. 1, с.41-80.
- [2]. TBankh, TRadul, MZarichnyi Absorbing sets in infinite -dimensional Manifolds. Math. Studies. Monog. Ser.1, VNTI Publ. LVIV, 1996.

Аналог теоремы А.М.Кытманова для $A(z)$ -аналитических функций

Хусенов Б.Э.

Бухарский государственный университет

e-mail: husenovbehzod@mail.ru

Пусть дана область $\Omega \subset \mathbb{C}$. Известно, если $z = x + iy$, то $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Пусть $D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \overline{A(z)} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $\bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z}$ для функция $|A(z)| \leq c < 1$, $c = \text{const}$.

Определение 1.[4] Если для дифференцируемая функция $f(z)$ в область Ω :

$$\bar{D}_A f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

то такая функция $f(z)$ называется **функция $A(z)$ -аналитическая** и обозначим наподобие $f \in O_A(\Omega)$, где $|A| \leq c < 1$, $c = \text{const}$, $A(z)$ -антианалитическая: $\frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = 0$. Равенство (1) называется **уравнения Белтрами**. Если в область Ω : $D_A f(z) = \frac{\partial f}{\partial z} - \overline{A(z)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, то функция $f(z)$ называется **функция $A(z)$ -антианалитическая**.

$$\text{В область } \Omega \text{ множества } L(a; r) = \left\{ |\psi(z; a)| = |z - a + \overline{\int_{\gamma(z; a)} A(\tau) d\tau}| < r \right\}$$

называется **лемниската**, где $a \in \Omega$, $r > 0$.

Определение 2.[3] Если функция f регулярная и ограниченная в лемнискате $L(a; r)$, то Функция f называется **принадлежащей к классу Харди** $H_A^p(L(a; r))$, $p \in \mathbb{N}$, т.е. выполняется неравенства $\exists T > 0$, $\int_{\partial L(a; r)} |f(z)|^p |dz + A(z) d\bar{z}| \leq T$, $0 < p < \infty$.

Пространство Харди H_A^p при $0 < p < \infty$ - это класс функций в лемнискате $L(a; r)$ удовлетворяющих следующему условию:

$$|f|_{H_A^p} = \sup_{0 < R < r} \left(\frac{1}{2\pi R} \int_{\partial L(a; r)} |f(z)|^p |dz + A(z) d\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Если функция f одновременно $f \in O_A(L(a; r))$ и $f \in H^p(L(a; r))$, $p \geq 1$, то обозначим $f \in H_A^p(L(a; r))$.

Определение 3.[2] Пространство $\mathcal{L}^\infty(L(a; r))$ строится из пространство $\mathcal{L}^\infty(L(a; r), F, \mu)$ измеримых функций, ограниченных почти всюду, отождествлением между собой функций, различающиеся лишь на множестве меры нуль, и, положив по определению:

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{z \in L(a; r)} |f(z)| = \text{vrai sup}_{z \in L(a; r)} |f(z)|,$$

где ess sup или vrai sup функции $f: L(a; r) \rightarrow \mathbb{C}$ - это нижняя грань множества таких чисел c , что $|f(z)| \leq c$, $z \in L(a; r)$, $c = \text{const}$ почти всюду.

Обозначим $f \in \mathcal{L}^\infty(D) - f \in O_A(L(a; R))$ и $f \in \mathcal{L}^\infty(L(a; R))$.

Пусть неявное видимое отображение $\omega(\zeta)$ на автоморфизмы лемниската $L(a; R)$. Пусть M - множество положительной меры Лебега на $\partial L(a; r)$. Рассмотрим

фиксированную $b \in L(a; r)$ и образы $\omega(M) = M_b$ множества M при автоморфизмах лемниската $\omega(\zeta)$.

Предположим, что для каждого $\omega(M)$ существует последовательность функций $\varphi_m^b = \varphi_b^{M_a} \in \mathcal{L}_A^\infty(M_b)$ такая, что всякой $f \in H_A(L(a; r))$

$$f(a) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{M_b} f(\zeta) \varphi_m^b(\zeta) \frac{d\zeta + Ad\bar{\zeta}}{\zeta - a + \int_{\gamma(a; \zeta)} \overline{A(\tau)} d\tau} \quad (2)$$

Покажем, случаю аналог теоремы А.М.Кытманова $A(z)$ -аналитической функции.

Если функция $A(z)$ антианалитическая в лемнискате, то выполняется следующее утверждение.

Теорема. Если $f \in H_A(L(a; r))$ и множество $M \subset \partial L(a; r)$ положительной меры Лебега, то для любой точки $b \in L(a; r)$. верна формула

$$f(b) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_M f(\zeta) \varphi_m^b(\omega(\zeta)) \frac{d\zeta + Ad\bar{\zeta}}{\zeta - b + \int_{\gamma(b; \zeta)} \overline{A(\tau)} d\tau}. \quad (3)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе, Новосибирск: Наука. 1990. 248 с.
2. Колмогоров А. М., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, Москва: Наука. 1968. 496 с.
3. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва: Наука. 1966. 628 с.
4. Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2016, Volume 9. Issue 3. 374-383 p.

О дробном интегрировании типа Адамара функций многих переменных

Яхшибоев М.У., Нарзуллаев У.Х.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Самаркандский филиал ТУИТ, Самарканд, Узбекистан

e-mail: yahshiboev@rambler.ru

В данной работе рассматривается ограниченность типа Адамаровское дробное интегрирование функций многих переменных в пространстве $L_{\vec{p}, \gamma} \left(R_{+}^n, \frac{dx}{x} \right)$.

Введенное Ж. Адамаром дробное интегродифференцирование типа $\left(x \frac{d}{dx} \right)^{\alpha}$, $-\infty < \alpha < \infty$, является инвариантными относительно оператора растяжения $\left(\prod_{\rho} f \right)(x) = f(\rho x)$, $\rho > 0, x > 0$.

Именно, введем пространство $L_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \left(R_{+}^n, \frac{dx}{x} \right)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $1 \leq p_i < \infty$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, функций $f(x_1, \dots, x_n)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_{\bar{p}, \bar{\gamma}}} = \left\{ \int_0^\infty \left[\dots \left(\int_0^\infty |f(x)|^{p_1} x_1^{-\gamma_1} \frac{dx_1}{x_1} \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} x_n^{-\gamma_n} \frac{dx_n}{x_n} \right\}^{\frac{1}{p_n}} < \infty.$$

Определение 1. Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $R_{+}^n = \{x \in R^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, интегралы

$$(J_{+ \dots +, \mu}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \dots \int_0^1 t^{\mu} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\alpha-1} \varphi(x \circ t) \frac{dt}{t},$$

$$(J_{- \dots -, \mu}^{\alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \dots \int_0^1 t^{\mu} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\alpha-1} \varphi(x \circ t^{-1}) \frac{dt}{t},$$

где $x \in R_{+ \dots +}^n$, $\left(\ln \frac{1}{t} \right)^{\alpha-1} = \left(\ln \frac{1}{t_1} \right)^{\alpha_1-1} \dots \left(\ln \frac{1}{t_n} \right)^{\alpha_n-1}$, $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)$, $\frac{dt}{t} = \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n}$, $x \circ t = (x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$, $x \circ t^{-1} = \left(\frac{x_1}{t_1}, \dots, \frac{x_n}{t_n} \right)$ назовем смешанными интегралами дробного порядка α ($\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, n}$) типа Адамара (соответственно левосторонними и правосторонними).

Теорема. Пусть $\gamma_i \in R^1$, $1 \leq p_i \leq \infty$, $\alpha_i > 0$ и $\mu_i \in C$, $i = \overline{1, n}$.

a) Если $Re \mu_i > -\frac{\gamma_i}{p_i}$, $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, то оператор $J_{+ \dots +, \mu}^{\alpha}$ ограничен в $L_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \left(R_{+}^n, \frac{dx}{x} \right)$, и

$$\|J_{+ \dots +, \mu}^{\alpha} \varphi\|_{L_{\bar{p}, \bar{\gamma}}} \leq C_{\bar{p}}^{+}(\mu, \bar{\gamma}) \|\varphi\|_{L_{\bar{p}, \bar{\gamma}}},$$

где $C_{\bar{p}}^{+}(\mu, \bar{\gamma}) = \prod_{i=1}^n C_{p_i}^{+}(\mu_i, \gamma_i)$, $C_{p_i}^{+}(\mu_i, \gamma_i) = \left(\frac{p_i}{\mu_i p_i + \gamma_i} \right)^{\alpha_i}$, $C_{\infty}^{+}(\mu_i, \gamma_i) = \left(\frac{1}{\mu_i + \gamma_i} \right)^{\alpha_i}$.

b) Если $Re \mu_i > \frac{\gamma_i}{p_i}$, $\gamma_i < 0$, $i = \overline{1, n}$, то оператор $J_{- \dots -, \mu}^{\alpha}$ ограничен в $L_{\bar{p}, \bar{\gamma}} \left(R_{+}^n, \frac{dx}{x} \right)$, и

$$\|J_{- \dots -, \mu}^{\alpha} \varphi\|_{L_{\bar{p}, \bar{\gamma}}} \leq C_{\bar{p}}^{-}(\mu, \bar{\gamma}) \|\varphi\|_{L_{\bar{p}, \bar{\gamma}}},$$

где $C_{\bar{p}}^{-}(\mu, \bar{\gamma}) = \prod_{i=1}^n C_{p_i}^{-}(\mu_i, \gamma_i)$, $C_{p_i}^{-}(\mu_i, \gamma_i) = \left(\frac{p_i}{\mu_i p_i - \gamma_i} \right)^{\alpha_i}$, $C_{\infty}^{-}(\mu_i, \gamma_i) = \left(\frac{1}{\mu_i - \gamma_i} \right)^{\alpha_i}$.

О непараметрическом оценивании распределение компоненты свертки

Едгаров С. Ж.

Ташкентский архитектурно-строительный институт

e-mail: syodgarov66@mail.ru

Пусть X , Y , Z — случайные величины, заданные на некотором вероятностном пространстве, причем $X = Y + Z$, Y и Z — независимые величины.

Интересующей нас является величина Y , тогда как Z можно рассматривать как ошибку измерения Y . По данным наблюдения величины X требуется оценить функцию плотности распределения величины Y .

Предложим, что случайная величина Z имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$, причем σ^2 считается известным. Тогда эта задача известна как

задача С. Н. Бернштейна [1], и оно решена в работе [2]. В этой работе, по данным наблюдениям случайной величины X , построена статистическая оценка для плотности распределения случайной величины Y и изучены ее некоторые статистические свойства.

Рассмотрим теперь следующую задачу, аналогическую задаче С. Н. Бернштейна. Предположим что случайная величина Z имеет Пуассоновское распределение $\Pi(\lambda)$, причем считается, что λ —известно. Итак, пусть $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ —выборка из n независимых наблюдений случайной величины X с плотностью распределения $g(x)$, а случайная величина Y имеет плотность распределения $f(y)$, которую нам необходимо оценить. По предположению, случайная величина имеет Пуассоновское распределение с известным параметром λ .

В работах [3, 4] предложена непараметрическая ядерная оценка для плотности распределения случайной величины Y . Установлена асимптотика её среднеквадратической ошибки и найдено оптимальное значение коэффициента "размытости" ядра. Доказана асимптотическая нормальность предложенной ядерной оценки и изучена асимптотика среднего значения интеграла от квадрата ошибки оценки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1]. Бернштейн С.Н., "О доверительных вероятностях Фишера," Изд. АН СССР. Сер. мат. н. 1941. н 5. с. 85-93.
- [2]. Надарая Э. А., "Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии," Тбилиси: ТГУ. 1983. с. 194.
- [3]. Едгаров С. Ж. , "О статистическом оценивании распределения компоненты свертки," Узб. мат. журн. 1997. н 3 с. 20-26.
- [4]. Хашимов Ш. А. , Едгаров С. Ж., "О выборе коэффициента размытости оценки распределения компоненты свертки," Узб. мат. журн. 1998. н 6 с. 64-70.

Об одной задаче с интегральными условиями для уравнения гиперболического типа

Зикиров О. С., Рахматов Н. Б.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент

e-mail: zikirov@yandex.ru

Смешанные задачи для гиперболических уравнений второго порядка с нелокальными интегральными условиями, они активно изучаются (см. например [1]).

Задачи с интегральными условиями образуют один из классов нелокальных задач, к исследованию которых приводят математические модели различных физических процессов.

Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < h\}$, где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ — известные функции.

Для уравнения (1) в области D изучаем нелокальную задачу в следующей постановке.

Задача. Найти регулярное в области D решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \alpha(x) \int_0^h K_1(y) u(x, y) dy + \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, y) = \beta(y) \int_0^l K_2(x) u(x, y) dx + \int_0^y \rho(y, \eta) u(l, \eta) d\eta + \mu(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

здесь $K_1(y)$, $K_2(x)$, $\varphi(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(y)$, $\rho(y, \eta)$ и $\mu(y)$ – заданные функции.

В работе доказаны теоремы существования и единственного регулярного решения. Доказательства теорем существования и единственности регулярных решений проведены методом интегральных уравнений. Исследование разрешимости в классах регулярных решений приводит к изучению системы интегральных уравнений Вольтерры второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений Самара. Самарский университет. 2012. - 194 с.

О геометрии римановы субмерсии над плоскими многообразиями

Зойидов А.Н.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

e-mail: zoyid.azam.math@gmail.com

Двойственное понятие субмерсии сформировалось относительно недавно, во второй половине двадцатого века. Геометрия субмерсии впервые изложена в работах [4], [5], [6]. Изучение геометрии субмерсии, в частности римановых субмерсии оказалось очень плодотворным в силу того, что римановы субмерсии имеют приложения во всех разделах современной римановой геометрии.

Пусть $M^\sim$ гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g . Обозначим через $V(M)^\sim$ множество всех гладких векторных полей, определенных на M , через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса C^∞ .

Определение 1. Дифференцируемое отображение $\pi : M \rightarrow B$ максимального ранга, где B – гладкое риманово многообразие размерности m , называется субмерсией при $n > m$.

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки $p \in B$ полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом субмерсия $\pi : M \rightarrow B$ порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M , слоями которого являются подмногообразия $L_p = \pi^{-1}(p)$, $p \in B$.

Определение 2. Субмерсия $\pi : M \rightarrow B$ называется римановой, если ее дифференциал $d\pi$ сохраняет длину горизонтальных векторов.

Изучению геометрии римановых субмерсий посвящены многочисленные исследования ([4]- [7]), в частности в работе [5] получены фундаментальные уравнения римановой субмерсий.

Теорема. Пусть $\pi : M \rightarrow B^\sim$ риманова субмерсия. $M^\sim$ риманово многообразие изометрично евклидовому пространству R^n , $B^\sim$ гладкое связное многообразие нулевой секционной кривизны. Тогда риманово многообразие B изометрично евклидовому пространству R^m .

Литература

- [1]. Ю.Д.Бураго, В.А.Залгаллер. Введение в Риманову геометрию. Санкт-Петербург. Наука. 1994г. 318 стр.
- [2]. Зойидов А.Н., Турсунов В.А. О геометрии субмерсий на многообразиях неотрицательной кривизны. Узбекский математический журнал. 2015, №2, с. 27-34
- [3]. Нарманов А.Я., Зойидов А.Н. Римановы субмерсии над плоскими многообразиями. Узбекский математический журнал. 2016, №4, с. 95-100
- [4]. O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469
- [5]. Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 236-242.
- [6]. Reinhart B. L. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1, 1959, pp. 119-132

Davriy orbitalar orqali hosil bo'lgan qo'zg'almas va davriy orbitalar

Do'stova Sh., Beshimova D.

Buxoro Davlat Universiteti

Bizga $F : R^n \rightarrow R^n$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. Quyidagi xususiy masalani ko'ramiz: $F(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$, ya'ni $\begin{cases} x' = f_1(y) \\ y' = f_2(x) \end{cases}$ bu yerda f_1, f_2 uzluksiz funksiyalar va $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan. $F(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$ uzluksiz akslantirishda (x^0, y^0) nuqtadan o'tuvchi trayektoriya deb quyida nuqtalarga aytiladi:

$$(x^0, y^0), \begin{cases} x^{(1)} = f_1(y^0) \\ y^{(1)} = f_2(x^0) \end{cases}, \begin{cases} x^{(2)} = f_1(y^{(1)}) \\ y^{(2)} = f_2(x^{(1)}) \end{cases}, \dots, \begin{cases} x^{(n+1)} = f_1(y^{(n)}) \\ y^{(n+1)} = f_2(x^{(n)}) \end{cases}, \dots$$

$F(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$ uzluksiz akslantirishda (x^0, y^0) nuqta qo'zg'almas nuqta deyiladi, agar $\begin{cases} x^0 = f_1(y^0) \\ y^0 = f_2(x^0) \end{cases}$ bo'lsa. $F(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$ uzluksiz akslantirishda

(x^0, y^0) nuqtaning m davri deyiladi agar $(x^0, y^0), \begin{cases} x^{(1)} = f_1(y^0) \\ y^{(1)} = f_2(x^0) \end{cases}, \begin{cases} x^{(2)} = f_1(y^{(1)}) \\ y^{(2)} = f_2(x^{(1)}) \end{cases},$

$$\begin{cases} x^{(3)} = f_1(y^{(2)}) \\ y^{(3)} = f_2(x^{(2)}) \end{cases}, \dots, \begin{cases} x^{(m)} = f_1(y^{(0)}) \\ y^{(m)} = f_2(x^0) \end{cases} \text{ bo'lsa.}$$

Teorema 1. Faraz qilaylik, (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalar $F(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$ uzluksiz akslantirish uchun davri 2 ga teng davriy nuqtalar bo'lsin. U holda (x_1, y_2) va (x_2, y_1) nuqtalar qo'zg'almas nuqtalar bo'ladi.

Teorema 2. Agar $F(x, y) = (f_1(y), f_2(x))$ uzluksiz akslantirishning (x_1, y_1) , (x_2, y_2) va (x_3, y_3) 3 ta qo'zg'almas nuqtasi mavjud bo'lsin. U holda shu nuqtalarning koordinatalaridan tuzilgan 6 ta $((x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_1), (x_3, y_2))$ nuqtalar davri 2 ga teng bo'lgan davriy nuqtalar bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Robert L. Devaney. "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems Second dition". Department of Mathematics Boston University, USA, 1989.
2. Oded Galor. "Discrete Dynamical Systems". Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.

Talabalarning matematik qobiliyatlarini geometrik masalalar yechish yordamida rivojlantirish

Ibragimov Nodir

Termiz davlat universiteti tayanch doktoranti
e-mail:

Yurtimizda olib borilayotgan keng ko'lamli islohotlar, o'zgarish va yangilanish jarayonida mamlakatimiz ta'lim sohasida yosh avlodga ta'lim-tarbiya berish, ularni har jihatdan barkamol, yuksak salohiyatli mustaqil fikrlay oladigan qilib voyaga yetkazishdek maqsadlarga xizmat qilmoqda. Ayniqsa, yoshlarning bilimini mustahkamlash, iste'dodini yuzaga chiqarishda turli o'qitish usullari borasidagi yangiliklar buning yorqin misolidir. Bu jarayonlarda o'quvchilarning matematik qobiliyatlarini aniqlash muammolari va ularni rivojlantirish dolzarb vazifalardandir. Istedodli yoshlarni aniqlash va qo'llab-quvvatlash orqali ta'lim-tarbiya sifatini yuksaltirish, o'qitishning inovatsion – pedagogik shakllari, zamonaviy texnologiyalardan foydalanish asosida ta'limdagi samaradorlik va natijaviylikni oshirishdek maqsadlarni ko'zlashi bilan ahamiyatlidir.

Ushbu mavzuda soha mutaxassislarning qator ishlari chop etilgan. Ularda o'quvchilarning matematik qobiliyatlarini aniqlash va rivojlantirish muammolarining turli aspektlari o'rganilgan [1-3].

Talabalarning matematik qobiliyatlarini rivojlantirish uchun aynan ularni rivojlantiruvchi komponentlardan **masalaning formal tuzilishini idrok qila olish qobiliyatini** rivojlantirishda geometrik masalalarni yechishda qo'llash usuliga to'xtalib o'tamiz[4].

Masalaning formal tuzilishini idrok qila olish qobiliyati - masala shartidan uni yechim uchun maksimal foydali bo'lgan axborotni ajratib olish qobiliyati. Idrok narsaning yaxlit obrazi hisoblanadi. Narsalarning shaqli, katta kichikligi, rangini doimo bir xilda idrok qilish amaliy jihatdan nihoyatda katta ahamiyatga egadir. Idrokning mazmuni kishi oldiga qo'yilgan vazifa bilan ham uning faoliyati sabablari bilan ham belgilanadi. Idrok qilishda analiz yordamida shu ayrim sezgilar idrokning reseptiv tomonini tashkil qiladi. Talabaning dars paytida matnni idrok qilishi ko'rish, eshitish idroklarni o'z ichiga oladi.

Fazoni idrok qilinishi kishining o'zini qurshab turgan muhitni chamalashining muqarrar shartlaridandir. U ob'ektiv ravishda mavjud bo'lgan fazoning aksini ifoda etadi va ob'ektlarning shakli, hajmi va o'zaro birgalikda joylashuvi, ular sathi, olisligi va yo'nalishlarining idrok etilishini o'z ichiga oladi. **Masalaning formal tuzilishini idrok qila olish qobiliyatini rivojlantirishda** ushbu ko'rinishdagi masalalarni qo'llash maqsadga muvofiqdir.

Masala. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazidan uchburchak tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda turishini isbotlang.

Yechilishi. A, B, C - uchburchak tomonlarining aylanaga urinish nuqtalari, O - aylananing markazi, S - perpendikulyardagi nuqta bo'lsin (1-rasm). S perpendikulyar nuqtaning tanlanishi talabada fazoni idrok qilinish jarayonini ifodalaydi. OA radius uchburchakning tomoniga perpendikulyar bo'lgani uchun uch perpendikulyar haqidagi teorema ko'ra SA kesma shu tomonga tushirilgan perpendikulyardir, uning uzunligi esa S nuqtadan uchburchakning tomonigacha bo'lgan masofadir. Pifagor teoremasiga ko'ra $SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$, bunda r - ichki chizilgan aylananing radiusi. Shunga o'xshash quyidagilarni topamiz: $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, ya'ni S nuqtadan uchburchak tomonlarigacha hamma masofalar teng.

Bu masala talabada fazoning formal tuzilishini idrok qila olish qobiliyatini rivojlantiradi.

Ushbu[4] masalalar to'plamidagi 2.2.6, 2.2.8, 2.2.17 - masalalardan talabalarning fazoning formal tuzilishini idrok qila olish qobiliyatini rivojlantiruvchi yuqoridagidek ko'rinishdagi masalalar sifatida foydalanish mumkin.

Adabiyotlar.

[1]. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. -М.: "Просвещение"1998. -С. 410.

[2]. О'тапов Т.У. Математика та'limi jarayonida o'quvchilarning matematik iqtidorini aniqlash va rivojlantirish metodikasi. Ped. fan. nom. dis. -Toshkent:2008. -B. 53.

Xorazmiy ishlarida noelementar matematika

Narmuratov N.K.

O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston

e-mail: narkulnarmuratov@mail.ru

Muhammad Muso al-Xorazmiyning ishlarida o'nli pozision sanoq sistemasi va unda arifmetik amallarni bajarish, algebra asosi va kvadrat tenglamani yechish algoritmi, elementar geometriya qoidalarini bayon qilinishi, dastlabki trigonometric jadvalni tuzish va boshqa shu kabi elementar matematika masalalari ko'rilgan. Ammo uning ishlarida noelementar matematikani ba'zi masalalarini ham ko'rish mumkin. Ushbu ishda Xorazmiyning aynan noelementar matematikasiga to'xtalamiz.

Cheksizlik haqidagi savol Xorazmiyning bizgacha etib kelgan barcha matematik asarlari "Algoritmi Hind hisobi haqida" Aljabr al muqobala hisobi haqida qisqacha kitob "Xorazmiy ziji"da ko'tarilgan.

Ushbu risolalardan birinchisida cheksizlik quyidagicha qaralgan: "Men topdimki, deydi Algorizmi, sonlardan atalishi mumkin bo'lgan hamma narsa, yani birdan uyqori va 9 gacha hammasi, yani 9 bilan bir orasidagi barchasi[karralanadi], yani bir ikkilanadi va ikki bo'ladi, o'sha birning o'zi uchlanadi va uch bo'ladi va hokazo 9 gacha. So'ngra bir o'rniga 10 qo'yiladi va 10 ikkilanadi va uchlanadi, bir bilan bo'lgani kabi va uning ikkilanganidan 20 hosil bo'ladi, uchlanganidan 30 va xuddi shuningdek to 90 gacha. So'ngra bir o'rniga

100 keladi va u yerda ikkilanadi va uchlanadi, xuddi bir va 10 bilan bo'lganidek va bundan 200, 300 va hokazo to 900 gacha. Keyin bir o'rniga minglar qo'yiladi va ikkilash, uchlash bilan, biz aytganimizdek, shu yo'sinda, 2 ming, 3 ming va hokazo cheksiz songacha hosil bo'ladi." [1,60-bet].

Arifmetik asardan oldin yozilgan "Aljabr al muqobala hisobi haqida qisqacha kitob" nomli risolada esa yuqoridagi mulohaza quyidagicha ifodalangan: "Men barcha sonlar birlardan tuzilishini va bir barcha sonlar tarkibiga kirishini topdim. Shuningdek, men birlardan tortib to o'ngacha bo'lgan barcha sonlarni biz birlar deb deb atashimizni bildim. So'ngra o'nni, xuddi bir bilan qilingani kabi, ikki baravar, uch baravarlanadi, bundan yigirma, o'ttiz va hokazo, to to'liq yuzga etguncha hosil bo'ladi. So'ngra bir va o'n bilan bo'lganidek, yuzni ikki baravarlanadi va uch baravarlanadi, to minggacha. So'ngra mingni shu yo'sinda har bir birikmada to o'rganilayotgan sonlar oxiriga etulganicha qaytariladi." [1,78-bet].

Ushbu keltirilgan ikki abzasning taqqoslab, ularni oxirgi so'zlaridagi farqni sezish mumkin. Oldin yozilgan algebraik asarda "... oxiriga etulganicha ..." deyilsa, keyin yozilgan arifmetik asarda esa "... cheksiz songacha ..." deyilgan. Bu esa Xorazmiyning "cheksizlik" tushunchasiga uzoq o'ylash natijasida kelgan deyishga asos bo'ladi.

Xorazmiyning algebraik asarini "O'lchash haqidagi bob"ida yana "cheksizlik" va "limitga o'tish" bilan bog'liq savol ko'rilgan: "Har bir doira shundayki, diametr yarmining aylana yarmiga [ko'paytmasi] uning yuzasidir. Chunki burchaklari va tomonlari teng bo'lgan ko'pburchak, uchburchak, kvadrat, beshburchak va hokazolar kabi shundayki, agar sen uning perimetri yarmini uning ichiga chizilgan eng katta aylana diametrining yarmisiga ko'paytirsang, uning yuzasi hosil bo'ladi." [1,103-104 betlar]. Bu yerda doira yuzasi haqidagi tasdiq xulosasi muntazam ko'pburchak yuzasi haqidagi tasdiqdan hosil qilingan yani n-burchakning tomonlari soni cheksizlikka intilgandagi limit vaziyat sifatida talqin qilingan.

Xorazmiy "Suratu-l-arz" asarida differensial hisobdagi egri chiziqlarni klassifikatsiyalash, "Quyosh soati tekisligida soatni yasash" asarida egri chiziqni nuqta koordinatalari bo'yicha yasash [2,137-140 betlar], algebraic asarning "Vasiyatlar kitobi" [1,110-139 betlar]da Diofant tenglamalarni natural sonlarda yechish kabi noelementar matematik masalalarni ham ko'rgan.

Adabiyotlar

- [1]. Мухаммад ибн Мусо ал-Хоразмий. Танланган асарлар. Математика, астрономия, география. Таржима ва изохлар муаллифи А. Ахмедов. "Фан" нашрияти, Тошкент 1983.
- [2]. Мухаммад ибн Мусо ал-Хоразми. К 1200-летию со дня рождения. Изд. "Наука Москва 1983

Galiley tekisligida uchburchak yuzasidan hosil qilinadigan ba'zi xossalari

Quralov D.E.

O'zbekiston Milliy Universiteti

e-mail: Dilshod_Quralov@mail.ru

Galiley tekisligida uchburchakning yuzasi xuddi Yevklid tekisligidagi kabi aniqlanadi.
Ta'rif. Galiley tekisligida uchburchak yuzasi uning asos uzunligi bilan mos balandligi ko'paytmasining yarmiga teng, ya'ni

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Shuningdek bu ta'rifda ixtiyoriy tomon va unga mos balandlik olinishi mumkin ekanidan

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c.$$

Ammo Galiley tekisligida tomon uzunligi va balandlik, shu tushunchalarning Evklid geometriyasidagi ma'nosidan butunlay farq qiladi. Bu farqni ushbu chizmada ko'rish mumkin:

Ammo uchburchakning yuzasining uchburchak uchlari koordinatalariga nisbatan formulasi Yevklid tekisligidagi formula bilan bir xil.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Determinantning birinchi yo'lini ikkinchisidan, ikkinchisini mos ravishda uchinchisidan mos ravishda ayirib va ba'zi shakl almashtirishlar bajarsak:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] = \\ &= \frac{1}{2} (x_3 - x_1) \cdot \left[\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) \right] \end{aligned}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda $a = (x_3 - x_1)$ va $h_a = \left[\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) \right]$ ekanidan, Galiley tekisligidagi uchburchak yuzasi formulasi kelib chiqadi.

References

- [1]. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия / И.М. Яглом. М. Наука, 1969. - 394с.

Noyevklid geometriyasida asosiy tushunchalar.

Xatamov I.M.

Jizzax davlat pedagogika instituti

Ma'lumki, geometriya fani asosiy tushunchalarni qabul qilishdan boshlanadi. Yevklid geometriyasida asosiy deb "nuqta" "to'g'ri chiziq" va "tekislik" tushunchalari olingan va bu tushunchalardan fanning boshlang'ich aksiomalarini qanoatlantirishi talab etiladi. Dastlabki aksiomalardan biri "Har qanday ikki nuqtadan faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi" degan tushunchadir. Tekislikda noyevklid geometriyalar ham mavjud, ammo ularni tasavvur qilish uchun biz asosan yevklid geometriyasi elementlaridan foydalanamiz. Masalan, elliptik tekislikni uch o'lchovli fazodagi sfera yordamida talqin qilishimiz mumkin. Bunda "nuqta" yarim sfera ustidagi nuqtalar, "to'g'ri chiziq" esa sferaning markazdan o'tgan tekislik bilan kesimi bo'ladi. Bu kesim sfera ustidagi katta aylana yoyi bo'ladi. Demak, "nuqta" "nuqta" "to'g'ri chiziq katta aylana yoyi, "tekislik sfera bo'lagi kabi tushunchalar uch o'lchovli elliptik fazoning asosiy tushunchalari bo'ladi. Giperbolik fazoda asosiy tushunchalarning yevklid talqinini ko'rish uchun ikki pallali giperboloidning bir pallasidan foydalanish mumkin. [1]. Buning uchun asimptotik konus va giperboloid biror kordinatalar sistemasida berilgan bo'lsin deb faraz qilamiz. Bunda kordinatalar boshi konusning uchida bo'lsin. Konus uchidan giperboloidni kesuvchi tekisliklarni o'tkazamiz. Kesimda giperbola hosil bo'ladi. Bu holda quyidagicha moslik o'rinli bo'ladi: "nuqta ikki pallali giperboloid ustidagi nuqta, "to'g'ri chiziq giperboloidni tekislik bilan kesimida hosil bo'lgan giperbolaning bir pallasi, "tekislik ikki pallali giperboloidning bir pallasi.

Adabiyotlar

- [1]. N.G'aybullayev. Maktabda noyevklid geometriya elementlari. Toshkent.: O'qituvchi. 1971 y.
- [2]. I.Xatamov, Sh.Fayzullayev. Lobachevskiy tekisligining giperboloid ustidagi talqini. Fizika, matematika va informatika jurnali. 2019 yil 1-son.

МАРДОН АЮБОВИЧ СОБИРОВ

Мардон Аюбович Собиров-профессор, заслуженный учитель Узбекистана, один из первых узбекских математиков нового времени, внесший большой вклад в развитие как математики, так и ее преподавание в нашей республике. Ученый родился 13 июля 1909 года в городе Самарканд, в семье ремесленника.

После окончания школы в 1924 году М.А. Собиров начал свою трудовую деятельность в качестве корреспондента газеты "Зарафшан" Самаркандской области.

В 1929 году он уезжает из Самарканда в Москву, где начал свою учебу в рабочем факультете, который в то время был подготовительным факультетом Московского Государственного Университета им. М. Ломоносова. После одного года учебы на рабочем факультете, он поступил на математический факультет этого университета.

В 1935 году М.А. Собиров поступил в аспирантуру МГУ, где его научным руководителем был профессор, известный геометр, Я Дубноф.

В 1938 году, Мардон Аюбович успешно защитил кандидатскую диссертацию. В Центральной Азии это была первая диссертационная работа по геометрии, которую защитил наш соотечественник. Она была инвариантных характеристик шаровых конгруэнций. После защиты диссертации, ученый вернулся в родной город и начал свою педагогическую деятельность, был доцентом физико-математического факультета Узбекского Государственного Университета в Самарканде, затем был назначен деканом этого же факультета.

Когда началась Вторая мировая война, Узбекский Государственный университет был переименован в Среднеазиатский Государственный Университет (в настоящее время Национальный Университет Узбекистана). В ноябре 1941 года М. А. Собиров стал деканом механико-математического факультета и заведующим кафедрой геометрии и топологии.

Благодаря М.А. Собирову многие талантливые молодые математики были направлены в Москву и другие крупные научные центры для обучения и выполнения научно-исследовательских работ.

Среди них А. Ахмедов, А. Абдурахманов, Г. Н. Гаюбов, К. Н. Гаюбова, А. Артикбаев, Ф. Ахраров, Т. Исанов и Х. Абдурахманова другие, которые считают своим руководителем М. А. Сабирова.

М. А. Сабиров большое внимание и много времени уделял на публикации учебников и учебных пособий на узбекском языке. В соавторстве с коллегой А. Юсуповым он создал учебник "Курс дифференциальной геометрии" для высших учебных заведений, который на протяжении долгих лет был единственным учебником по дифференциальной геометрии на узбекском языке.

Вместе с коллегами он перевел I и II том учебника Г. М. Фихтенгольца "Дифференциальное и интегральное исчисление" и "Элементарная геометрия" Д. И. Перепелкина.

Книга "Методы начертательной геометрии и её приложения" переведена и дополнена упражнениями Мардоном Аюбовичем, долгое время послужило основным учебным пособием для педагогических институтов.

Также заслуживают внимания работы М. Собирова в области Узбекской математической терминологии. Его первая работа в этом направлении была опубликована в 1952 году под названием "Русско-узбекский терминологический словарь". В 1970 году издана книга "Русско-узбекский математический словарь в

1973 году "Русско-узбекский словарь по математике".

Мардон Аюбович - был талантливым педагогом, до конца жизни читал лекции в механико-математическом факультете Национального Университета Узбекистана по основным курсам геометрии.

Кто его знал, работал вместе, учился у него, вспоминают его как энергичного работника, требовательного педагога, любимого отца и друга.

С женой Онахон ая они прожили счастливую жизнь, воспитали трех детей и внуков. В жизни он был обаятельным человеком и имел хорошее чувство юмора. На вопрос: - "Как можно прожить долгую жизнь?" он отвечал: "Просто не надо умирать!".

Собиров Мардон Аюбович умер 15 ноября 1993 года. В этом году его коллеги, друзья и близкие отмечали 110летие со дня его рождения. Математики Узбекистана всегда помнят его как любимого "Домла".